第八章
向量代数与空间解析几何

习题 8－1　向量及其线性运算

1. 设 $u=a-b+2c$，$v=-a+3b-c$. 试用 a,b,c 表示 $2u-3v$.

解　$2u-3v=2(a-b+2c)-3(-a+3b-c)$

$=5a-11b+7c$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证　如图 8－1，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$. 故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}.$$

即 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

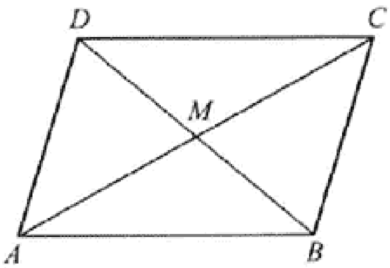


图 8－1

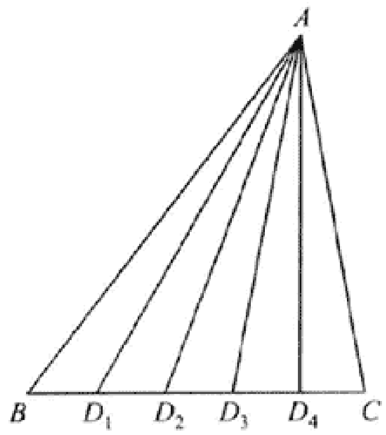


图 8－2

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=c$，$\overrightarrow{BC}=a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

证　如图 8－2，根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}a,\overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}a,\overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}a,\overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}a,$$

故

$$\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}a-c.$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}a-c.$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}a-c.$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right),$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4),D(-2,-3,1).$$

解 A 点在第四卦限,B 点在第五卦限,C 点在第八卦限,D 点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0),B(0,4,3),C(3,0,0),D(0,-1,0).$$

解 在坐标面上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如 xOy 面上的点的坐标为 $(x_0,y_0,0)$,xOz 面上的点的坐标为 $(x_0,0,z_0)$,yOz 面上的点的坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零,比如 x 轴上的点的坐标为 $(x_0,0,0)$,y 轴上的点的坐标为 $(0,y_0,0)$,z 轴上点的坐标为 $(0,0,z_0)$.

A 点在 xOy 面上,B 点在 yOz 面上,C 点在 x 轴上,D 点在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1)点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$,关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$,关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$,关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$,关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8-3,根据题意,P_0F 为点 P_0 关于 xOz 面的垂线,垂足 F 坐标为 $(x_0,0,z_0)$;P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线,垂足 D 坐标为 $(x_0,y_0,0)$;P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线,垂足 E 坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线,垂足 A 的坐标为 $(x_0,0,0)$;P_0B 为点 P_0 关于 y 轴

的垂线，垂足 B 的坐标为 $(0,y_0,0)$；P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线，垂足 C 的坐标为 $(0,0,z_0)$.

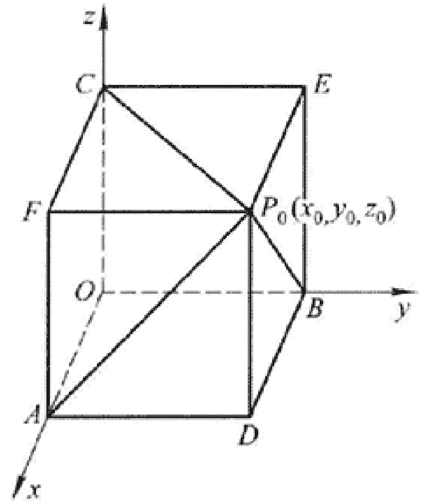


图 8－3

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解　如图 8－4，过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标，其特点是，它们的横坐标均相同，纵坐标也均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标，其特点是，它们的竖坐标均相同.

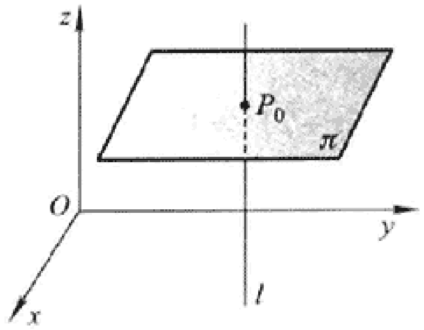


图 8－4

11. 一边长为 a 的正方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

解　如图 8－5，已知 $AB=a$，故 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，于是各顶点的坐标分别为

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$，$G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$H\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

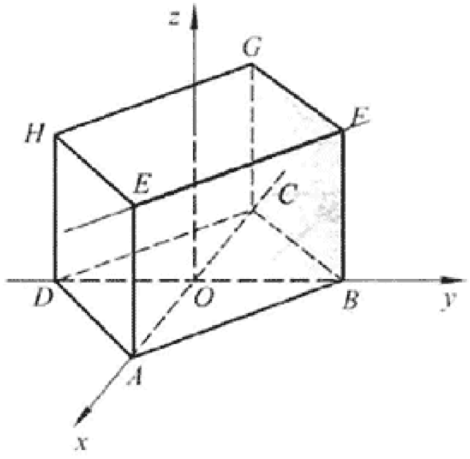


图 8-5

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解　点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$,点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$,点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解　所求点在 yOz 面上,不妨设为 $P(0,y,z)$,点 P 与三点 A,B,C 等距离.

$$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2},\ |\overrightarrow{PB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$

$$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}.$$

由 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$ 知

$$\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases}9+(y-1)^2+(z-2)^2=16+(y+2)^2+(z+2)^2,\\9+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2.\end{cases}$$

解上述方程组,得 $y=1,z=-2$. 故所求点坐标为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　由 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$

知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1),$$

其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. 其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

方向角分别为 $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{3}{4}\pi,\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$;(2) $\cos\beta=1$;(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1)由 $\cos\alpha=0$ 知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,故向量与 x 轴垂直,平行于 yOz 面.

(2)由 $\cos\beta=1$ 知 $\beta=0$,故向量与 y 轴同向,垂直于 xOz 面.

(3)由 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$,故向量垂直于 x 轴和 y 轴,即与 z 轴平行,垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解 已知 $|\boldsymbol{r}|=4$,则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, −4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 点坐标为 (x,y,z),则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z),$$

由题意知

$$2-x=4,-1-y=-4,7-z=7,$$

故 $x=-2,y=3,z=0$. 因此 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13,在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 8-2 数量积 向量积 *混合积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$;(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解 (1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)\\&=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times 3=-18$,

$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$

$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$. 因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$,$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,3-(-1),1-2)=(2,4,-1)$,

$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3,1-3,3-1)=(0,-2,2)$,

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直,故所求向量可取为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|},$$

由
$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

知
$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$,计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3,4-1,2-8)=(-2,3,-6)$,

$\boldsymbol{F}=(0,0,-100\times 9.8)=(0,0,-980)$,

$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\,880(\mathrm{J})$.

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处,有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着;在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处,有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着(图 8-6). 问 $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\boldsymbol{F}_1|,|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持

平衡？

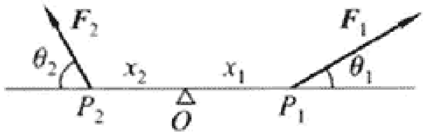


图 8－6

解　如图 8－6，已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零，又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1-|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2=0,$$

即
$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解　$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

解　$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu).$

要 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，即要 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\perp(0,0,1)$，即

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0,0,1)=0,$$

亦即
$$(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0,$$

故 $-2\lambda+4\mu=0$，因此当 $\lambda=2\mu$ 时能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证　如图 8－7，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. 只要证 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可. 由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=-|\overrightarrow{AO}|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=0,\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\angle ACB$ 为直角.

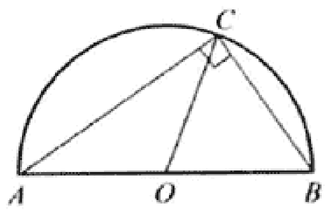


图 8－7

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$，　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}&=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)\\&=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-3,1)+(1,-1,3)=(3,-4,4)$，

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,-1,3)+(1,-2,0)=(2,-3,3)$，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1)=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

10. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求$\triangle OAB$的面积.

解　由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|,$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=(-3,-3,1),$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1}=\sqrt{19}.$$

故
$$S_{\triangle OAB}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

***11.** 已知$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，试利用行列式的性质证明：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

证　因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$，$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$，

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$

而由行列式的性质知$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 试用向量证明不等式：

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant |a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

证 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 知，$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，从而

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例，即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ 时，上述等式成立.

习题8－3 平面及其方程

1. 求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 因此所求平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$，设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0.$$

将点 $(3,0,-1)$ 代入上式得 $D=-4$. 故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 $\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$. 所求平面与 $\overrightarrow{OM_0}$ 垂直，可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}$，设所求平面方程为

$$2x+9y-6z+D=0.$$

将点 $M_0(2,9,-6)$ 代入上式，得 $D=-121$. 故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

解 由 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$，得 $x-3y-2z=0$，即为所求平面方程.

注 设 $M(x,y,z)$ 为平面上任一点，$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 为平面上已知点. 由 $\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$，即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

它就表示过已知三点 $M_i(i=1,2,3)$ 的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面：

(1) $x=0$； (2) $3y-1=0$；

(3) $2x-3y-6=0$; (4) $x-\sqrt{3}y=0$;

(5) $y+z=1$; (6) $x-2z=0$;

(7) $6x+5y-z=0$.

解 (1)—(7)的平面分别如图 8-8(a)—(g).

(1) $x=0$ 表示 yOz 坐标面.

(2) $3y-1=0$ 表示过点$\left(0,\dfrac{1}{3},0\right)$且与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x-3y-6=0$ 表示与 z 轴平行的平面.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面.

(5) $y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面.

(6) $x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面.

(7) $6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面.

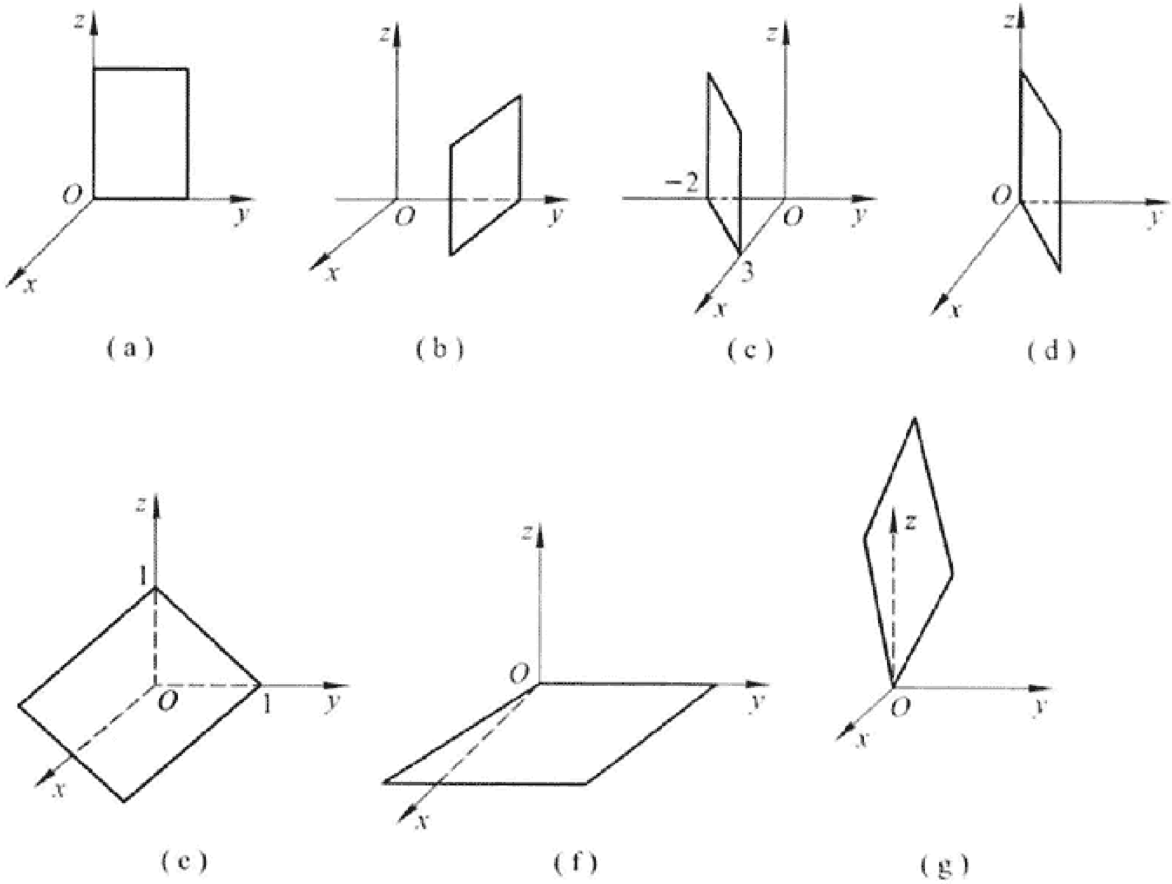


图 8-8

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$. 设平面与三个坐标面 xOy, yOz, zOx 的夹角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$. 则根据平面的方向余弦知

$$\cos\theta_1=\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\theta_2=\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,0,0)}{3\cdot 1}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\theta_3=\cos\beta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,1,0)}{3\cdot 1}=-\frac{2}{3}.$$

6. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量$\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，试求这平面方程.

解　所求平面平行于向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，可取平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

故所求平面为$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0$，即

$$x+y-3z-4=0.$$

7. 求三平面$x+3y+z=1$，$2x-y-z=0$，$-x+2y+2z=3$的交点.

解　联立三平面方程

$$\begin{cases}x+3y+z=1,\\2x-y-z=0,\\-x+2y+2z=3.\end{cases}$$

解此方程组得$x=1$，$y=-1$，$z=3$. 故所求交点为$(1,-1,3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程：

(1) 平行于xOz面且经过点$(2,-5,3)$；

(2) 通过z轴和点$(-3,1,-2)$；

(3) 平行于x轴且经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$.

解　(1) 所求平面平行于xOz面，故设所求平面方程为$By+D=0$. 将点$(2,-5,3)$代入，得

$$-5B+D=0,\quad 即\quad D=5B.$$

因此，所求平面方程为

$$By+5B=0,\quad 即\quad y+5=0.$$

(2) 所求平面过z轴，故设所求平面方程为$Ax+By=0$. 将点$(-3,1,-2)$代入，得

$$-3A+B=0,\quad 即\quad B=3A.$$

因此，所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0,\quad 即\quad x+3y=0.$$

(3) 所求平面平行于x轴，故设所求平面方程为$By+Cz+D=0$. 将点$(4,0,-2)$及$(5,1,7)$分别代入方程得

$$-2C+D=0\quad 及\quad B+7C+D=0.$$

从而解得

$$C=\frac{D}{2},\quad B=-\frac{9}{2}D.$$

因此,所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即 $$9y-z-2=0.$$

9. 求点(1,2,1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解　利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$\begin{aligned}d&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{|1+2\cdot 2+2\cdot 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1.\end{aligned}$$

习题 8-4　空间直线及其方程

1. 求过点(4,-1,3)且平行于直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

解　所求直线与已知直线平行,故所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$,直线方程即为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

解　取所求直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3,0-(-2),2-1)=(-4,2,1),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$$

解　根据题意可知已知直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

取 $x=0$,代入直线方程得 $\begin{cases}-y+z=1,\\y+z=4.\end{cases}$ 解得 $y=\frac{3}{2},z=\frac{5}{2}$. 这样就得到直线经过的一点 $\left(0,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=-2t, \\ y=\dfrac{3}{2}+t, \\ z=\dfrac{5}{2}+3t. \end{cases}$$

注　由于所取的直线上的点可以不同，因此所得到的直线对称式方程或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

解　根据题意，所求平面的法向量可取已知直线的方向向量，即

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

故所求平面方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$. 即

$$16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

解　两已知直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(3,4,-1),\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=(10,-5,10),$$

因此，两直线的夹角的余弦

$$\cos\theta=\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}$$

$$=\frac{3\times10-4\times5-1\times10}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0.$$

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

证　已知直线的方向向量分别是

$$s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,1,5),\quad s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-9,-3,-15),$$

由 $s_2=-3s_1$ 知两直线互相平行.

7. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解　所求直线与已知的两个平面平行,因此所求直线的方向向量可取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,3,1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

注　本题也可以这样解:由于所求直线与已知的两个平面平行,则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线.不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=a, \\ y-3z=b. \end{cases}$$

将点(0,2,4)代入上式,得 $a=8,b=-10$. 故所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=8, \\ y-3z=-10. \end{cases}$$

8. 求过点(3,1,-2)且通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面方程.

解　利用平面束方程,过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

将点(3,1,-2)代入上式得 $\lambda=\frac{11}{20}$. 因此所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

即
$$8x-9y-22z-59=0.$$

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解　已知直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(2,4,-2)$, 平面的法向量 $n=(1,-1,-1)$.

设直线与平面的夹角为 φ, 则

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\cdot1+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系：

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

解　设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线与平面的夹角为 φ，且

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}.$$

(1) $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$，$\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$，

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\cdot4+(-7)\cdot(-2)+3\cdot(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$. 故直线平行于平面或在平面上，现将直线上的点 $A(-3,-4,0)$ 代入平面方程，方程不成立. 故点 A 不在平面上，因此直线不在平面上，直线与平面平行.

(2) $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$，$\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$，由于 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}}=1,$$

知 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，故直线与平面垂直.

(3) $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，由于 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot1+1\cdot1+(-4)\cdot1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0,$$

知 $\varphi=0$，将直线上的点 $A(2,-2,3)$ 代入平面方程，方程成立，即点 A 在平面上. 故直线在平面上.

11. 求过点 $(1,2,1)$ 而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面的方程.

解　两直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(1,-2,-3),\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(0,-1,-1),$$

取
$$n=s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-1,1,-1),$$
则过点(1,2,1),以 n 为法向量的平面方程为
$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0,$$
即
$$x-y+z=0.$$

12. 求点(−1,2,0)在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线.该直线与平面的交点即为所求.根据题意,过点(−1,2,0)与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线为
$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1},$$
将它化为参数方程 $x=-1+t,y=2+2t,z=-t$,代入平面方程得
$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$
整理得 $t=-\frac{2}{3}$.从而所求点(−1,2,0)在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解 直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-3,-3)$.

在直线上取点(1,−2,0),这样,直线的方程可表示成参数方程形式
$$x=1,\quad y=-2-3t,\quad z=-3t. \tag{1}$$
又,过点 $P(3,-1,2)$,以 $s=(0,-3,-3)$ 为法向量的平面方程为
$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$
即
$$y+z-1=0. \tag{2}$$
将式(1)代入式(2)得 $t=-\frac{1}{2}$,于是直线与平面的交点为 $\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,故所求距离为
$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设 M_0 是直线 L 外一点,M 是直线 L 上任意一点,且直线的方向向量为 s,试证:点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

证　如图 8-9，点 M_0 到直线 L 的距离为 d. 由向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M}\times s|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}$，s 为邻边的平行四边形的面积. 而 $\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}$ 表示以 $|s|$ 为边长的该平行四边形的高，即为点 M_0 到直线 L 的距离. 于是

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

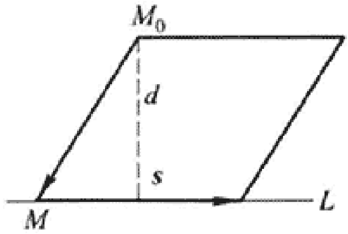


图 8-9

15. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解　作过已知直线的平面束，在该平面束中找出与已知平面垂直的平面，该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得 $$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$$

由 $$(2+3\lambda)\cdot4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot1=0,$$

得 $\lambda=-\frac{13}{11}$. 代入平面束方程，得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

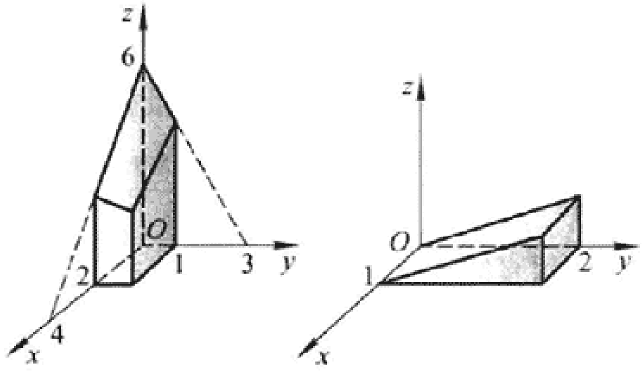
$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

16. 画出下列各平面所围成的立体的图形：

(1) $x=0,y=0,z=0,x=2,y=1,3x+4y+2z-12=0$；

(2) $x=0,z=0,x=1,y=2,z=\frac{y}{4}$.

解　(1) 如图 8-10(a)；　(2) 如图 8-10(b).



(a)　　　　(b)

图 8-10

习题 8-5　曲面及其方程

1. 一球面过原点及 $A(4,0,0)$, $B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点,求球面的方程及球心的坐标和半径.

解　设所求球面的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,将已知点的坐标代入上式,得

$$a^2+b^2+c^2=R^2, \tag{1}$$

$$(a-4)^2+b^2+c^2=R^2, \tag{2}$$

$$(a-1)^2+(b-3)^2+c^2=R^2, \tag{3}$$

$$a^2+b^2+(4+c)^2=R^2. \tag{4}$$

联立(1)(2)得 $a=2$,联立(1)(4)得 $c=-2$,将 $a=2$ 代入(2)(3)并联立得 $b=1$,故 $R=3$. 因此所求球面方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$,其中球心坐标为 $(2,1,-2)$,半径为 3.

2. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心,且通过坐标原点的球面方程.

解　设以点 $(1,3,-2)$ 为球心,R 为半径的球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=R^2.$$

球面过原点,故

$$R^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0+2)^2=14,$$

从而所求球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$.

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

解　将已知方程整理成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以 $(1,-2,-1)$ 为球心,以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方

程,它表示怎样的曲面?

解　设动点坐标为(x,y,z),根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2.$$

它表示以$\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$为球心,以$\frac{2}{3}\sqrt{29}$为半径的球面.

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解　以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替抛物线方程 $z^2=5x$ 中的 z,得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即

$$y^2+z^2=5x.$$

注　xOz 面上的曲线 $F(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解　以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替圆方程 $x^2+z^2=9$ 中的 x,得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解　以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 y,得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36,$$

即

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 x,得该双曲线绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

即

$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

8. 画出下列各方程所表示的曲面:

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$;　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;　(4) $y^2-z=0$;　(5) $z=2-x^2$.

解　(1) 如图 8-11(a)；　(2) 如图 8-11(b)；　(3) 如图 8-11(c)；

(4) 如图 8-11(d)；　(5) 如图 8-11(e).

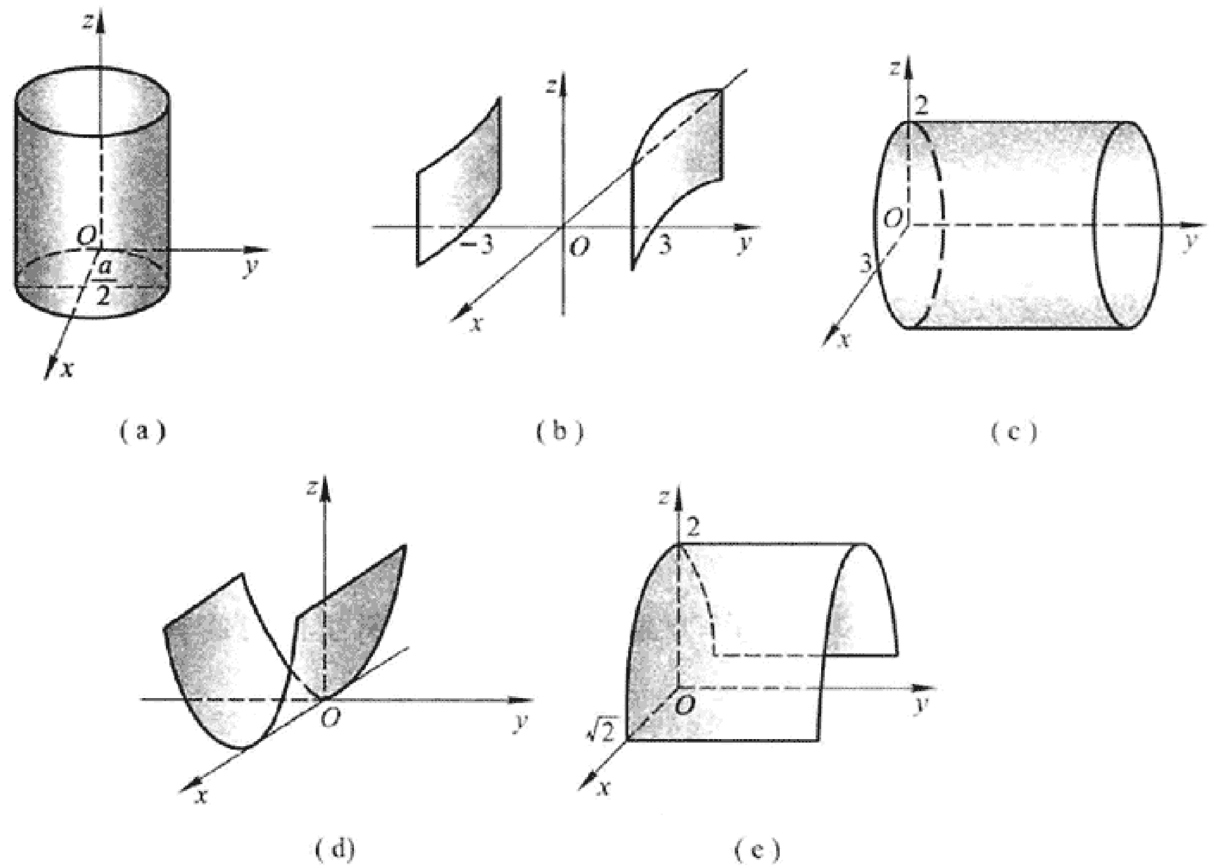


图 8-11

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=2$；　(2) $y=x+1$；

(3) $x^2+y^2=4$；　(4) $x^2-y^2=1$.

解　(1) $x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线，在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1，y 轴截距也为 1 的一条直线，在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点，半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴，y 轴为虚轴的双曲线，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；

(3) $x^2-y^2-z^2=1$;　　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

解　(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ 表示 xOy 面上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 xOz 面上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 yOz 面上双曲线 $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

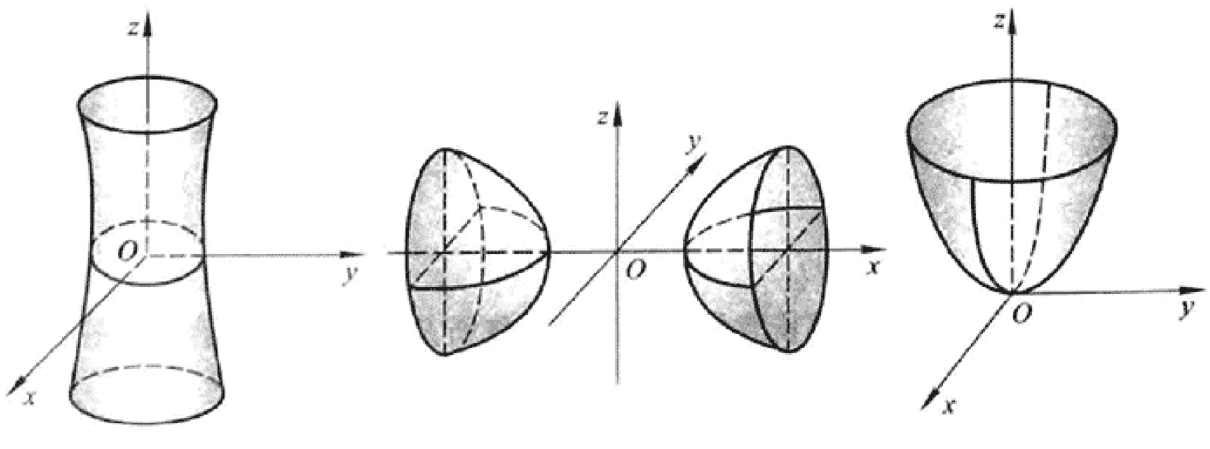
(3) $x^2-y^2-z^2=1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 xOz 面上双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$ 表示 xOz 面上直线 $z=x+a$ 或 $z=-x+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 yOz 面上的直线 $z=y+a$ 或 $z=-y+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$;　　(2) $x^2-y^2-4z^2=4$;　　(3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

解　(1) 如图 8 - 12(a);　　(2) 如图 8 - 12(b);　　(3) 如图 8 - 12(c).



(a)　　(b)　　(c)

图 8 - 12

12. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) $z=0,z=3,x-y=0,x-\sqrt{3}y=0,x^2+y^2=1$(在第一卦限内);

(2) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2$(在第一卦限内).

解　(1) 如图 8 - 13 所示;　　(2) 如图 8 - 14 所示.

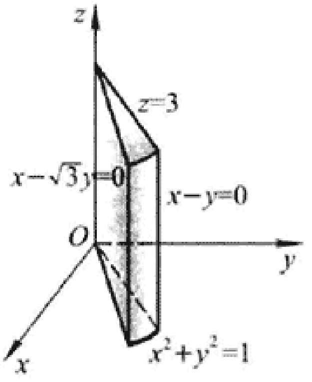


图 8 - 13

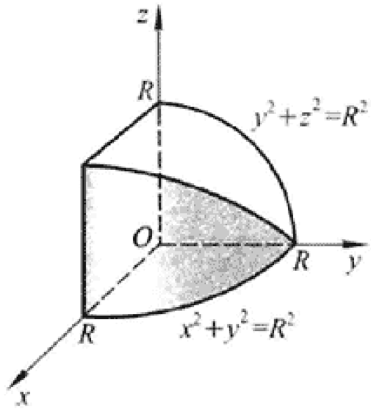


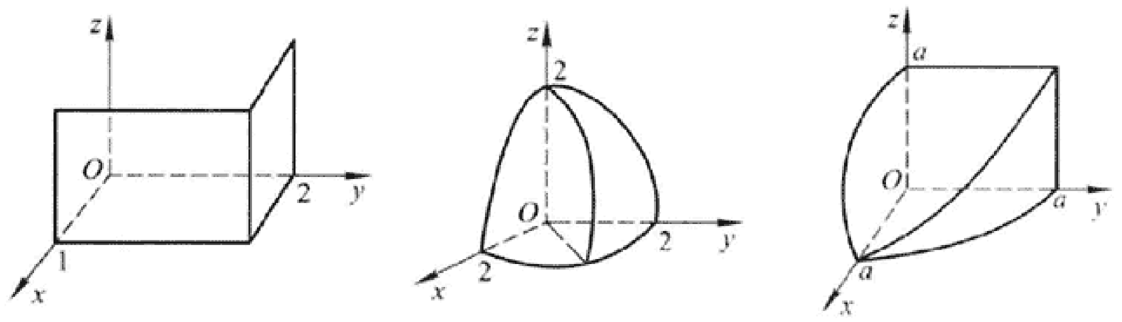
图 8 - 14

习题 8 - 6 空间曲线及其方程

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

(1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

解 (1) 如图 8 - 15(a); (2) 如图 8 - 15(b); (3) 如图 8 - 15(c).



(a) (b) (c)

图 8 - 15

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

解 (1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点. 在空间解析几何中表示两平面的交线,即空间直线.

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与其切线 $y=3$ 的交

点，即切点. 在空间解析几何中表示椭圆柱面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$与其切平面 $y=3$ 的交线，即空间直线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$的柱面方程.

解　在$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 x，得

$$3y^2-z^2=16,$$

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 y，得

$$3x^2+2z^2=16,$$

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解　在$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x+z=1\end{cases}$中消去 z，得

$$x^2+y^2+(1-x)^2=9,\quad 即\quad 2x^2-2x+y^2=8,$$

它表示母线平行于 z 轴的柱面，故$\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8,\\z=0\end{cases}$表示已知交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\y=x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\z=0.\end{cases}$

解　(1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得

$$2x^2+z^2=9,$$

取 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$，则 $z=3\sin t$，从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\\y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\\z=3\sin t\end{cases}\quad(0\leqslant t<2\pi).$$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，得

$$(x-1)^2+y^2=3,$$

取 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则 $y=\sqrt{3}\sin t$，从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

6. 求螺旋线$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ 得 $x^2 + y^2 = a^2$,故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$

由 $y = a\sin\theta, z = b\theta$ 得 $y = a\sin\dfrac{z}{b}$,故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为$\begin{cases} y = a\sin\dfrac{z}{b}, \\ x = 0. \end{cases}$

由 $x = a\cos\theta, z = b\theta$ 得 $x = a\cos\dfrac{z}{b}$,故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

7. 求上半球 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant ax\ (a > 0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解 如图 8-16. 所求立体在 xOy 面上的投影即为 $x^2 + y^2 \leqslant ax$,而由

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

得 $z = \sqrt{a^2 - ax}$. 故所求立体在 xOz 面上的投影为由 x 轴、z 轴及曲线 $z = \sqrt{a^2 - ax}$ 所围成的区域.

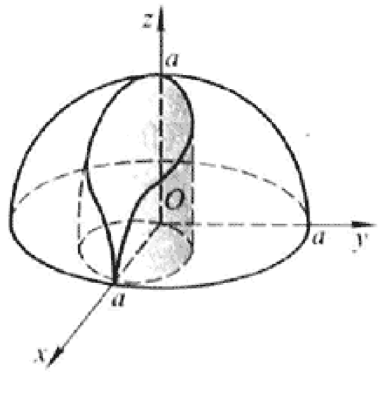


图 8-16

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

解　联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=4 \end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4$. 故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ z=0. \end{cases}$$

如图 8－17.

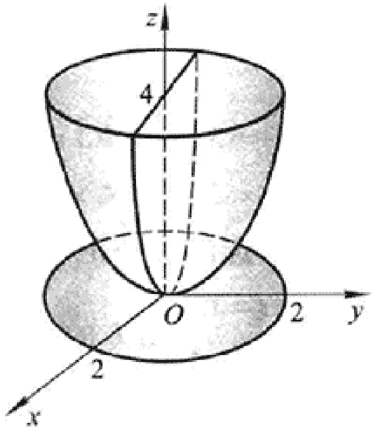


图 8－17

联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x=0 \end{cases}$ 得 $z=y^2$, 故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z=y^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

同理, 联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=0 \end{cases}$ 得 $z=x^2$. 故旋转抛物面在 xOz 面上的投影为由 $z=x^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

总习题八

1. 填空：

(1) 设在坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0,y_0,z_0) 和 (x,y,z), 则在 $[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系中, 点 M 的坐标为__________, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为________;

(2) 设数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三个向量是________的;

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $\lambda=$________;

(4) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $|\boldsymbol{c}|=5$, 且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解　(1) 点 M 的坐标为 $\underline{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}$, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 $(x-x_0+$

$x_0, y - y_0 + y_0, z - z_0 + z_0) = \underline{\quad (x,y,z) \quad}$.

(2) 由$[(\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = 0$ 得$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(3) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \lambda \boldsymbol{a} = (4,-1,10) - \lambda(2,1,2) = (4-2\lambda, -1-\lambda, 10-2\lambda)$.

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$,故 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = (2,1,2) \cdot (4-2\lambda, -1-\lambda, 10-2\lambda) = 27 - 9\lambda = 0$,从而 $\lambda = \underline{\quad 3 \quad}$.

(4) 由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$;

由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

又,由 $|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{c}|^2$ 知以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的三角形为直角三角形,且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 故

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| &= 3|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \\ &= 3 \times 3 \times 4 \times 1 = \underline{36}. \end{aligned}$$

2. 下列两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设直线 L 的方程为$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程为(　　);

(A) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$　(C) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

(2) 下列结论中,错误的是(　　).

(A) $z + 2x^2 + y^2 = 0$ 表示椭圆抛物面

(B) $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示双叶双曲面

(C) $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$ 表示圆锥面

(D) $y^2 = 5x$ 表示抛物柱面

解　(1) 应选(A). 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s} = (-2,1,3)$,过点$(1,1,1)$.

(2) 应选(B). $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示单叶双曲面.

3. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和点 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

解　根据题意,设所求点为 $M(0,y,0)$,由

$$1^2 + (y+3)^2 + 7^2 = 5^2 + (y-7)^2 + (-5)^2,$$

得 $y = 2$. 故所求点为 $M(0,2,0)$.

4. 已知$\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$,$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$,求从顶点 C 所引中线的长度.

解　设 AB 中点的坐标为(x_0,y_0,z_0),由

$$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4,\quad y_0 = \frac{2-4}{2} = -1,\quad z_0 = \frac{7-1}{2} = 3,$$

从而顶点 C 所引中线的长度

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

5. 设$\triangle ABC$ 的三边$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$,三边中点依次为 D,E,F,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$

表示$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$，并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}.$$

证 如图 8－18，D,E,F 分别为 BC,CA,AB 的中点，因此

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

从而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

故$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathbf{0}$.

6. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

证 如图 8－19，D,E 分别是 CA 与 BC 的中点.

由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=2\overrightarrow{DE}$知

$$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DE}\quad 且\quad |\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.$$

即三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

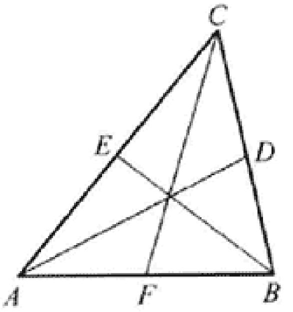


图 8－18

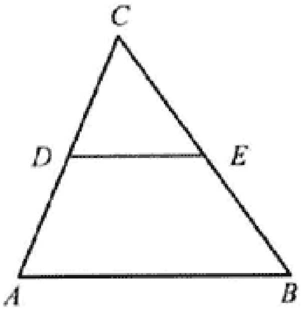


图 8－19

7. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，求 z.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z)$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3-(-1),-5-1,8-z)=(4,-6,8-z)$,

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 知

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2},$$

经整理得 $z=1$.

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

$$=(\sqrt{3})^2+1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=4+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7,$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$=(\sqrt{3})^2+1^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=4-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1,$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=3-1=2,$$

故

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

所以$(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

9. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解　由 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 知$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$,由 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 知$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,故

$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\tag{1}$$

$$7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0.\tag{2}$$

两式相减得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23|\boldsymbol{b}|^2$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$,代入(1)式得

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

从而
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

所以
$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}.$$

10. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,z)$,问 z 为何值时$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$最小?并求出此最小值.

解
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(2,-1,-2)\cdot(1,1,z)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+z^2}}$$

$$=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}.$$

设 $f(z)=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$,则

$$f'(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2+z^2}-(1-2z)\dfrac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},$$

令 $f'(z)=0$ 得 $z=-4$.

由于 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为单调减少函数. $f(z)$ 取得最大值时，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小值.

经验证 $z=-4$ 时，$f(z)$ 达到最大值，此时 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小值且由 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，知 $\theta_{\min}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

11. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解　根据向量积的几何意义知以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积

$$S=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|$$

$$=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$=5\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=5\times4\times3\times\frac{1}{2}=30.$$

12. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$.

解　设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即

$$2x-3y+z=0.$$

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$x-2y+3z=0.$$

由 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=14$ 知

$$2x+y+2z=14|\boldsymbol{c}|=14\times3=42.$$

联立上述三个方程得 $x=14$，$y=10$，$z=2$. 故 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$.

13. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$，证明三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

证　由 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}-1&3&2\\2&-3&-4\\-3&12&6\end{vmatrix}=0$ 知 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$，故三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$

共面.

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,则

$$\begin{aligned}(-3,12,6)&=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,-3,-4)\\&=(-\lambda+2\mu,3\lambda-3\mu,2\lambda-4\mu),\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3,\\3\lambda-3\mu=12,\\2\lambda-4\mu=6,\end{cases}$$

解得 $\lambda=5,\mu=1$. 故

$$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

14. 已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等,求点 M 的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

即 $(x-1)^2+(y+1)^2-4(z-1)=0$ 为点 M 的轨迹的方程.

15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1) $z=2(x^2+y^2)$;　　(2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$;

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$;　　(4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

解 (1) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\z=2y^2,\end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(2) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1,\end{cases}$ 旋转轴为 y 轴.

(3) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\z=\sqrt{3}y,\end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(4) 母线为 $\begin{cases}z=0,\\x^2-\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 旋转轴为 x 轴.

16. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 设所求平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

平面过点 $A(3,0,0)$, $B(0,0,1)$, 故 $a=3,c=1$. 这样平面方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+z=1.$$

它与 xOy 面成$\frac{\pi}{3}$角，故

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{b},1\right)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1^2}\cdot 1},$$

即
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1=4,\quad \frac{1}{b}=\pm\frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为

$$x+\sqrt{26}y+3z=3\quad 或\quad x-\sqrt{26}y+3z=3.$$

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

解　直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&-1\\1&0&0\end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

作过点 $(1,-1,1)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(0,-1,-1)$ 为法向量的平面：

$$-1\cdot(y+1)-(z-1)=0,\quad 即\quad y+z=0,$$

联立 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0,\\y+z=0\end{cases}$ 得垂足 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$，设平面方程为 $Ax+By+D=0$. 平面过点 $(1,-1,1)$ 及垂足 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，故有

$$\begin{cases}A-B+D=0,\\-\frac{1}{2}B+D=0,\end{cases}$$

由此解得 $B=2D, A=D$. 因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$，即

$$x+2y+1=0.$$

18. 求过点 $(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解　设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，故有

$$3m-4n+p=0, \tag{1}$$

又所求直线与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交，故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$$

即

$$10m-4n-3p=0. \tag{2}$$

联立(1)(2)式可得

$$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

注　若两直线 $l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ 相交，则 l_1 与 l_2 必共面，故

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0,$$

即有

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

19. 已知点 $A(1,0,0)$ 及点 $B(0,2,1)$，试在 z 轴上求一点 C，使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

解　所求点位于 z 轴，设其坐标为 $C(0,0,z)$，由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,$$

而

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix}$$

$$=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(2z)^2+(z-1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}.$$

设 $f(z)=5z^2-2z+5$，则由 $f'(z)=10z-2=0$ 得 $z=\frac{1}{5}$. 因 $f''\left(\frac{1}{5}\right)=10>0$，故当 $z=\frac{1}{5}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得极小值. 由于驻点唯一，故当 $z=\frac{1}{5}$，即 C 的坐标为

$\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$时，$S_{\triangle ABC}$最小.

20. 求曲线$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解　在$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$中消去 z，得 $2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$，即 $x^2+y^2-x-y=0$. 故$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$为曲线在 xOy 面上的投影曲线方程.

在$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$中消去 y，得 $z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2$，即 $2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$，故$\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0 \end{cases}$为曲线在 xOz 面上的投影曲线方程.

同理，可得$\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0. \end{cases}$它就是曲线在 yOz 面上的投影曲线方程.

21. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解　在$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$中消去 z，得 $2x=x^2+y^2$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，故立体在 xOy 面上的投影为$\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0 \end{cases}$（如图 8－20）.

而该立体在 zOx 面上的投影为$\begin{cases} x\leqslant z\leqslant \sqrt{2x}, \\ y=0 \end{cases}$（如图 8－20），在 yOz 面上的投影为$\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\leqslant 1, z\geqslant 0, \\ x=0. \end{cases}$

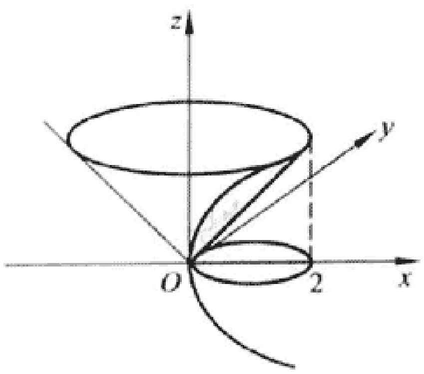


图 8－20

22. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$；

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$，平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$；

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$；

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$，柱面 $y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $x=1$.

解 (1) 如图 8－21(a)；　(2) 如图 8－21(b)；

(3) 如图 8－21(c)；　(4) 如图 8－21(d).

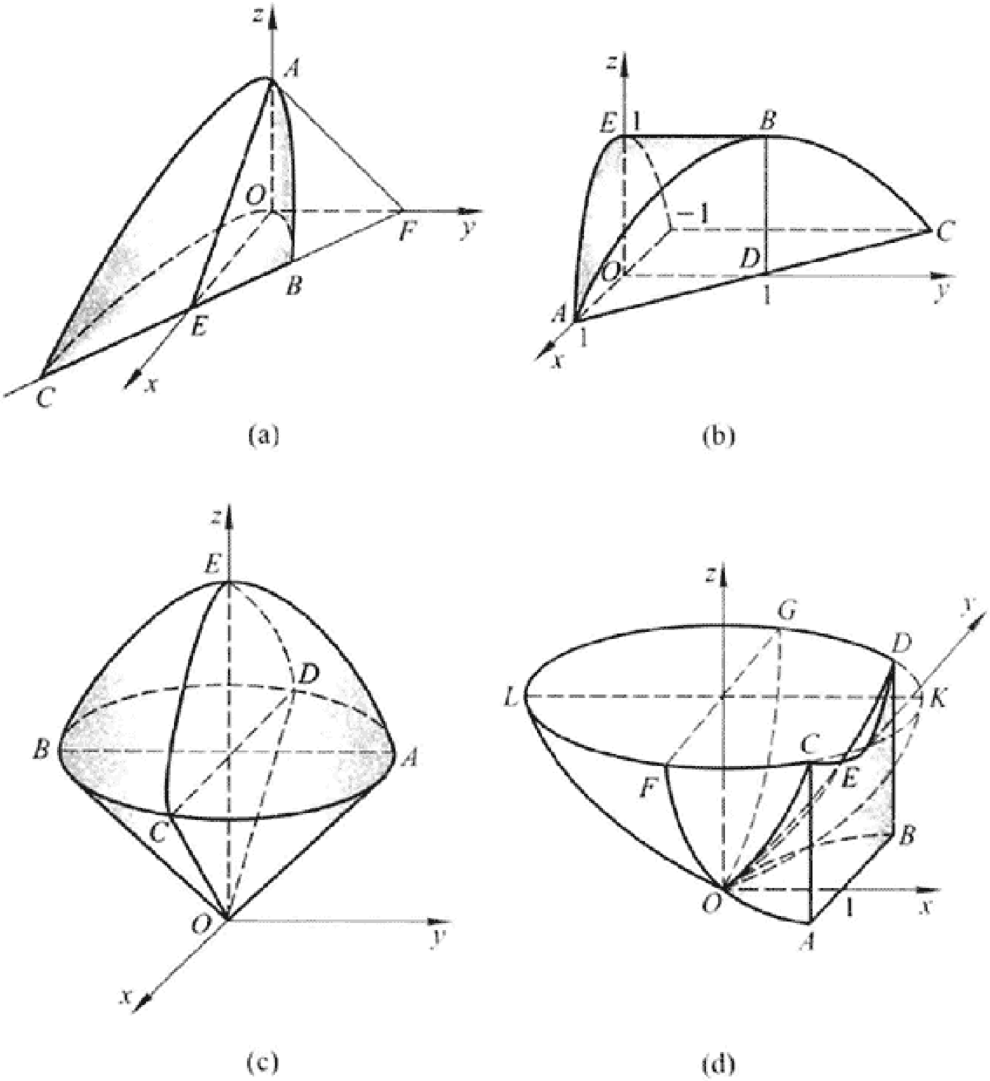


图 8－21

注 在建立了空间直角坐标系后，可按下列方法作图：

1° 先作出立体的各表面(曲面)，及它们与各坐标面的交线；

2° 再作各曲面的交线.

第九章

多元函数微分法及其应用

习题 9－1　多元函数的基本概念

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$；　(2) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y) \mid y > x^2\}$；

(4) $\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1\} \cap \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$.

解　(1) 集合是开集，无界集；导集为 $\mathbf{R}^2$，边界为 $\{(x,y) \mid x = 0$ 或 $y = 0\}$.

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$，边界为 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为 $\{(x,y) \mid y \geqslant x^2\}$，边界为 $\{(x,y) \mid y = x^2\}$.

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为 $\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解
$$
\begin{aligned}
f(tx,ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty} \\
&= t^2\left(x^2 + y^2 - xy\tan\frac{x}{y}\right) \\
&= t^2 f(x,y).
\end{aligned}
$$

3. 试证函数 $F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式
$$F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v).$$

证
$$
\begin{aligned}
F(xy,uv) &= \ln(xy) \cdot \ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v) \\
&= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v \\
&= F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v).
\end{aligned}
$$

4. 已知函数 $f(u,v,w) = u^w + w^{u+v}$，试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

解　$f(x+y,x-y,xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$；　(2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$;

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　(1) $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$.

(2) $\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}$.

(3) $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$.

(4) $\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$.

(5) $\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(6) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\}$.

注　本题是求多元函数的定义域,与求一元函数的定义域相类似,先写出构成该函数的各个简单函数的定义域,再求出表示这些定义域的集合的交集,即得所求函数的定义域.

6. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$;　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

注　本题利用多元初等函数的连续性求极限,即极限值等于函数值.对于多元初等函数在点 P_0 处的极限,若 P_0 在该函数的定义区域内,均可利用此方法求极限.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

(3) $$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}.$$

注　本题分母的极限为零,不能运用商的极限运算法则,而采用通过分母或分子有理化等方法,消去分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则,这是求极限的基本方法之一.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{1-e^{xy}}\cdot(\sqrt{2-e^{xy}}+1) = -1\cdot 2=-2.$

注　本题利用 $e^{xy}-1\sim xy((x,y)\to(0,0))$，相当于令 $u=xy$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $xy\neq 0$ 时，有 $u\to 0$ 且 $u\neq 0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{-u}=-1.$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\tan(xy)}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\tan(xy)}{xy}\cdot x = 1\cdot 2=2.$

注　本题利用 $\tan(xy)\sim xy((x,y)\to(2,0))$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

注　本题利用 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2((x,y)\to(0,0))$.

*7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证　(1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}\ (k\neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的，故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式：$y=x$，$y=-x$，分别求极限：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

两种方式求得的极限值不同，故所求极限不存在.

注　本题证明极限不存在所采用的方法是：找出两条不同的路径，使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限存在但不相等；或者找出一条特殊的路径，使得点 P 沿这条路径趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限不存在. 这是证明多元函数极限不存在常用的方法.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解　这函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq 0\}$，曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点，且函数在这些点处没有定义，因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

*9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

证　因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,只要$\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$,所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

*10. 设 $F(x,y)=f(x)$,$f(x)$ 在 x_0 处连续,证明:对任意 $y_0\in\mathbf{R}$,$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证　设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续,所以 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而,当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时,$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$,因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题 9-2　偏导数

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x.$

(2) $$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}$$

$$=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}$$

$$=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}$$

$$=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x$$

$$=x[\cos(xy)-\sin(2xy)].$$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}.$$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].$$

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证　因为　$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$,

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

所以
$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证　因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},$$

所以
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解
$$f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y},$$
$$f_x(x,1)=1.$$

5. 曲线 $\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解　设 $z=f(x,y)$. 按偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$ 就是曲线在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的斜率，而 $f_x(2,4)=\left.\frac{1}{2}x\right|_{x=2}=1$，即 $k=\tan\alpha=1$，于是倾角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$.

解　(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy.$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y,$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

7. 设$f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$,求$f_{xx}(0,0,1),f_{xz}(1,0,2),f_{yz}(0,-1,0)$及$f_{zzx}(2,0,1)$.

解　因为

$$f_x=y^2+2xz,\quad f_{xx}=2z,\quad f_{xz}=2x,$$
$$f_y=2xy+z^2,\quad f_{yz}=2z,$$
$$f_z=2yz+x^2,\quad f_{zz}=2y,\quad f_{zzx}=0,$$

所以$f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xz}(1,0,2)=2,f_{yz}(0,-1,0)=0,f_{zzx}(2,0,1)=0.$

8. 设$z=x\ln(xy)$,求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y=\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证　(1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=n\mathrm{e}^{-kn^2t}\cos nx,$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(n\mathrm{e}^{-kn^2t}\cos nx)=-n^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx,$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial t}=k(-n^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx)=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

习题 9－3 全微分

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(4) $u=x^{yz}$.

解 (1) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy).$$

(3) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy).$$

(4) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x,$$

所以

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz.$$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以

$$\left.dz\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy.$$

3. 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解

$$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x},\quad dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y.$$

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,全增量

$$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119,$$

全微分

$$dz=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125.$$

4. 求函数 $z=e^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y.$$

当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时,全微分

$$dz=e\cdot 0.15+e\cdot 0.1=0.25e.$$

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(2) $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分;

(4) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q,则下列四个选项中正确的是(   ).

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$ (B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$ (D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

解 由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件,二元函数可微分必定可(偏)导,二元函数可微分必定连续,因此选项(A)正确.

选项(B)中(3)$\not\Rightarrow$(2),选项(C)中(4)$\not\Rightarrow$(1),选项(D)中(1)$\not\Rightarrow$(4).

*6. 计算$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$的近似值.

解 设$z=\sqrt{x^3+y^3}$,则

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}=\sqrt{x^3+y^3}+\Delta z\approx\sqrt{x^3+y^3}+\mathrm{d}z$$
$$=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

取$x=1,y=2,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$,可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\cdot1\cdot0.02+3\cdot2^2\cdot(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

*7. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln2=0.693$).

解 设$z=x^y$,则

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+\mathrm{d}z=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y.$$

取$x=2,y=1,\Delta x=-0.03,\Delta y=0.05$,可得

$$(1.97)^{1.05}\approx2-0.03+2\ln2\cdot0.05=1.97+0.0693\approx2.039.$$

*8. 已知边长为$x=6$ m与$y=8$ m的矩形,如果x边增加5 cm而y边减少10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为$z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z\approx\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y).$$

当$x=6,y=8,\Delta x=0.05,\Delta y=-0.1$时,

$$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot0.05-8\cdot0.1)=-0.05,$$

即,这个矩形的对角线的长减少大约5 cm.

*9. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为0.1 cm,内高为20 cm,内半径为4 cm.求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为$V=\pi R^2H$,圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积V的增量ΔV,而

$$\Delta V\approx\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H=2\pi RH\Delta R+\pi R^2\Delta H.$$

当$R=4,H=20,\Delta R=\Delta H=0.1$时,

$$\Delta V\approx2\cdot3.14\cdot4\cdot20\cdot0.1+3.14\cdot4^2\cdot0.1\approx55.3,$$

即容器外壳的体积大约是55.3 cm^3.

*10. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为(7 ± 0.1) cm和(24 ± 0.1) cm.试求利用上述两值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为x和y,则斜边长度为$z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| |\Delta y|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x|\Delta x| + y|\Delta y|) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x + y\delta_y),$$

便得

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x + y\delta_y).$$

当 $x = 7, y = 24, \delta_x = 0.1, \delta_y = 0.1$ 时,

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7 \cdot 0.1 + 24 \cdot 0.1) = 0.124.$$

即计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

*11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为(63 ± 0.1) m 和(78 ± 0.1) m,这两边的夹角为 60° ± 1°. 试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b,它们的夹角为 θ,则三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta,$$

$$|\Delta S| \approx |\mathrm{d}S| = \left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial S}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial S}{\partial \theta}\Delta\theta\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right| |\Delta a| + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right| |\Delta b| + \left|\frac{\partial S}{\partial \theta}\right| |\Delta\theta|$$

$$= \frac{1}{2}b\sin\theta|\Delta a| + \frac{1}{2}a\sin\theta|\Delta b| + \frac{1}{2}ab\cos\theta|\Delta\theta|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a + \frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b + \frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,$$

便得

$$\delta_S = \frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a + \frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b + \frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta.$$

当 $a = 63, b = 78, \theta = \frac{\pi}{3}, \delta_a = 0.1, \delta_b = 0.1, \delta_\theta = \frac{\pi}{180}$ 时,三角形面积的近似值为

$$S = \frac{1}{2}\cdot 63 \cdot 78 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 2\,127.8(\mathrm{m}^2),$$

绝对误差为

$$\delta_S = \frac{1}{2}\cdot 78 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.1 + \frac{1}{2}\cdot 63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.1 + \frac{1}{2}\cdot 63\cdot 78\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$= 27.6(\mathrm{m}^2),$$

相对误差为

$$\frac{\delta_S}{S}=\frac{27.6}{2\,127.8}=1.30\%.$$

*12. 利用全微分证明:两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证 设 $u=x+y$,则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|$$
$$=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\leqslant\delta_x+\delta_y,$$

便得

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*13. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和,商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证 设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$,则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=|y\Delta x+x\Delta y|\leqslant|y||\Delta x|+|x||\Delta y|\leqslant|y|\delta_x+|x|\delta_y,$$

$$|\Delta v|\approx|\mathrm{d}v|=\left|\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2}\right|\leqslant\frac{|y||\Delta x|+|x||\Delta y|}{|y|^2}\leqslant\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2}.$$

便得

$$\delta_u=|y|\delta_x+|x|\delta_y,\quad \delta_v=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2},$$

$$\frac{\delta_u}{|u|}=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|xy|}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|},$$

$$\frac{\delta_v}{|v|}=\frac{1}{\left|\dfrac{x}{y}\right|}\cdot\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和,商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题 9-4 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z=u^2+v^2$,而 $u=x+y,v=x-y$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot1+2v\cdot1=2(u+v)=4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot1+2v\cdot(-1)=2(u-v)=4y.$$

2. 设 $z=u^2\ln v$,而 $u=\dfrac{x}{y},v=3x-2y$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3$$
$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$
$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t, y=t^3$，求$\frac{dz}{dt}$.

解　$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t+e^{x-2y}\cdot(-2)\cdot 3t^2$$
$$=e^{x-2y}(\cos t-6t^2)=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2).$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t, y=4t^3$，求$\frac{dz}{dt}$.

解　$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$$
$$=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5. 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$.

解　$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x$$
$$=\frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}.$$

6. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x, z=\cos x$，求$\frac{du}{dx}$.

解　$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-1)\cdot(-\sin x)$$
$$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)$$
$$=e^{ax}\sin x.$$

7. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v, y=u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)$

$$=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot(-1)$$

$$=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

故等式成立.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$; (2) $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$;

(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

解 (1) 将中间变量 x^2-y^2, e^{xy} 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})=2xf_1'+ye^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'.$$

(2) 令 $s=\frac{x}{y}$, $t=\frac{y}{z}$,则 $u=f(s,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{y}f_s,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_s+\frac{1}{z}f_t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_t.$$

(3) 将中间变量 x,xy,xyz 依次编为 1,2,3 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

证

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+F(u)+xf'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+y\left[x+xf'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}f'(u)\right]+y[x+f'(u)]$$

$$=xy+xF(u)+xy=z+xy,$$

故等式成立.

10. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\cdot f_u\cdot 2x}{f^2(u)}=-\frac{2xyf_u}{f^2(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-yf_u\cdot(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f_u}{f^2(u)},$$

故

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf_u}{f^2(u)}+\frac{1}{yf(u)}+\frac{2yf_u}{f^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{z}{y^2}.$$

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解　令 $u=x^2+y^2$，则 $z=f(u)$. 记 $f'=f'(u)$，$f''=f''(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+4x^2f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2f'+4y^2f''.$$

*12. 求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

(1) $z=f(xy,y)$；　　(2) $z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$;　　(4) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

解　(1) 令 $s=xy,t=y$,则 $z=f(s,t)$,s 和 t 是中间变量.将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=yf_1',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{dt}{dy}=xf_1'+f_2'.$$

因为 $f(s,t)$ 是 s 和 t 的函数,所以 f_1' 和 f_2' 也是 s 和 t 的函数,从而 f_1' 和 f_2' 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数.故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(yf_1')=yf_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=y^2f_{11}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(yf_1')=f_1'+y\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{dt}{dy}\right)$$

$$=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(xf_1'+f_2')$$

$$=x\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{dt}{dy}\right)+f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{dt}{dy}$$

$$=x^2f_{11}''+2xf_{12}''+f_{22}''.$$

(2) 令 $s=x,t=\dfrac{x}{y}$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{ds}{dx}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'.$$

因为 $f(s,t)$ 是 s 和 t 的函数,所以 f_1' 和 f_2' 也是 s 和 t 的函数,从而 f_1' 和 f_2' 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数.故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=f_{11}''+f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(f_{21}''+f_{22}''\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=\frac{2x}{y^3}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}f_2'+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''.$$

(3) 令 $s=xy^2,t=x^2y$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial s}{\partial x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=y^2f_1'+2xyf_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2'.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f_1'+2xyf_2')\\&=y^2\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)+2yf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)\\&=y^2(y^2f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+2xy(y^2f_{21}''+2xyf_{22}'')\\&=2yf_2'+y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2f_1'+2xyf_2')\\&=2yf_1'+y^2\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\\&\quad 2xf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)\\&=2yf_1'+y^2(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+2xf_2'\\&\quad+2xy(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')\\&=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2x^3yf_{22}'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2xyf_1'+x^2f_2')\\&=2xf_1'+2xy\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)+x^2\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)\\&=2xf_1'+2xy(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+x^2(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')\\&=2xf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}''.\end{aligned}$$

（4）令 $u=\sin x, v=\cos y, w=e^{x+y}$，并将 u,v,w 依次编为1,2,3号，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{du}{dx}+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}=\cos xf_1'+e^{x+y}f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\frac{dv}{dy}+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}=-\sin yf_2'+e^{x+y}f_3',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\cos xf_1'+e^{x+y}f_3')\\&=-\sin xf_1'+\cos x\left(f_{11}''\frac{du}{dx}+f_{13}''\frac{\partial w}{\partial x}\right)+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}\left(f_{31}''\frac{du}{dx}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\&=-\sin xf_1'+\cos x(\cos xf_{11}''+e^{x+y}f_{13}'')+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}(\cos xf_{31}''+e^{x+y}f_{33}'')\end{aligned}$$

$$= e^{x+y}f_3' - \sin xf_1' + \cos^2 xf_{11}'' + 2e^{x+y}\cos xf_{13}'' + e^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos xf_1' + e^{x+y}f_3')$$

$$= \cos x\left(f_{12}''\frac{dv}{dy} + f_{13}''\frac{\partial w}{\partial y}\right) + e^{x+y}f_3' + e^{x+y}\left(f_{32}''\frac{dv}{dy} + f_{33}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$= \cos x(-\sin yf_{12}'' + e^{x+y}f_{13}'') + e^{x+y}f_3' + e^{x+y}(-\sin yf_{32}'' + e^{x+y}f_{33}'')$$

$$= e^{x+y}f_3' - \cos x\sin yf_{12}'' + e^{x+y}\cos xf_{13}'' - e^{x+y}\sin yf_{32}'' + e^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-\sin yf_2' + e^{x+y}f_3')$$

$$= -\cos yf_2' - \sin y\left(f_{22}''\frac{dv}{dy} + f_{23}''\frac{\partial w}{\partial y}\right) + e^{x+y}f_3' + e^{x+y}\left(f_{32}''\frac{dv}{dy} + f_{33}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$= -\cos yf_2' - \sin y(-\sin yf_{22}'' + e^{x+y}f_{23}'') + e^{x+y}f_3' + e^{x+y}(-\sin yf_{32}'' + e^{x+y}f_{33}'')$$

$$= e^{x+y}f_3' - \cos yf_2' + \sin^2 yf_{22}'' - 2e^{x+y}\sin yf_{23}'' + e^{2(x+y)}f_{33}''.$$

*13. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续,而

$$x = \frac{s-\sqrt{3}t}{2},\quad y = \frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

所以$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

习题 9－5　隐函数的求导公式

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$,求$\frac{dy}{dx}$.

解　设 $F(x,y) = \sin y + e^x - xy^2$,则

$$F_x = e^x - y^2, \quad F_y = \cos y - 2xy.$$

当 $F_y \neq 0$ 时,有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} = \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.$$

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$,求$\frac{dy}{dx}$.

解　设 $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x}$,则一阶偏导数分别为

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

当 $F_y \neq 0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big/\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 设 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$,则

$$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}},\quad F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}},\quad F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是当 $F_z\neq 0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

解法二 在所给方程两端分别对 x 求偏导数,并注意 $z=z(x,y)$,得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

当 $1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\neq 0$ 时,解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\dfrac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$

同理,方程两端分别对 y 求偏导数,得

$$2+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

当 $1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\neq 0$ 时,解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$

解法三 对所给方程两端分别求全微分,得

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0,$$

即

$$\left(1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\right)\mathrm{d}z=\left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2\right)\mathrm{d}y.$$

当 $\sqrt{xyz}-xy\neq 0$ 时,解得 $\mathrm{d}z=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}x+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}y$. 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　令$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},\quad F_y=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},$$

$$F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2}.$$

于是当$F_z\neq 0$时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{z}\Big/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z}{x+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{y}\Big/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5. 设$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证　设$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1,$$

$$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2=2F_x,$$

$$F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-3F_x,$$

故当$F_z\neq 0$时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

6. 设$x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$都是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的具有连续偏导数的函数，证明：$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证　因为

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$$

所以

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

7. 设$\Phi(u,v)$具有连续偏导数，证明由方程$\Phi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的函数$z=f(x,y)$满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

证　令$u=cx-az$，$v=cy-bz$，则

$$\Phi_x = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = c\Phi_u,$$

$$\Phi_y = \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = c\Phi_v,$$

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a\Phi_u - b\Phi_v.$$

故当 $\Phi_z \neq 0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}.$$

于是

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + b \cdot \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c.$$

*8. 设 $e^z - xyz = 0$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z) = e^z - xyz$,则 $F_x = -yz$,$F_z = e^z - xy$. 于是当 $F_z \neq 0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z - xy) - yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{y^2 z - yz\left(e^z \cdot \frac{yz}{e^z - xy} - y\right)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

*9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$,则

$$F_x = -3yz, \quad F_y = -3xz, \quad F_z = 3z^2 - 3xy.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时,有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right)$$

$$= \frac{\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2 - xy) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$=\frac{\left(z+\frac{xyz}{z^2-xy}\right)\cdot(z^2-xy)-yz\left(\frac{2xz^2}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

（1）设$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$；

（2）设$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$；

（3）设$\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$其中$f,g$具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$；

（4）设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解　（1）分别在两个方程两端对x求导，得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\2x+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases}2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x,\\2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x.\end{cases}$$

当$D=\begin{vmatrix}2y&-1\\2y&3z\end{vmatrix}=6yz+2y\neq0$时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-2x&-1\\-x&3z\end{vmatrix}}{D}=\frac{-6xz-x}{6yz+2y}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}2y&-2x\\2y&-x\end{vmatrix}}{D}=\frac{2xy}{6yz+2y}=\frac{x}{3z+1}.$$

（2）所给方程组确定两个一元隐函数：$x=x(z)$和$y=y(z)$，将所给方程的两端分别对z求导并移项，得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1,\\2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-2z.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=2(y-x)\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2z & 2y\end{vmatrix}}{D}=\frac{-2y+2z}{2(y-x)}=\frac{y-z}{x-y},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2x & -2z\end{vmatrix}}{D}=\frac{-2z+2x}{2(y-x)}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数:$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$.

分别在方程两端对 x 求偏导数,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f'_2\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g'_1\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g'_2yv\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases}(xf'_1-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_2\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf'_1,\\ g'_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg'_2-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'_1.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}xf'_1-1 & f'_2\\ g'_1 & 2yvg'_2-1\end{vmatrix}=(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-uf'_1 & f'_2\\ g'_1 & 2yvg'_2-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-uf'_1(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}xf'_1-1 & -uf'_1\\ g'_1 & g'_1\end{vmatrix}=\frac{g'_1(xf'_1+uf'_1-1)}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}.$$

(4) 此方程组确定的两个二元隐函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 是已知函数的反函数,令

$$F(x,y,u,v)=x-\mathrm{e}^u-u\sin v,$$
$$G(x,y,u,v)=y-\mathrm{e}^u+u\cos v.$$

则

$$F_x=1,\quad F_y=0,\quad F_u=-\mathrm{e}^u-\sin v,\quad F_v=-u\cos v,$$
$$G_x=0,\quad G_y=1,\quad G_u=-\mathrm{e}^u+\cos v,\quad G_v=-u\sin v.$$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\mathrm{e}^u-\sin v & -u\cos v\\ -\mathrm{e}^u+\cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u\neq 0$ 时,由

隐函数求导公式得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}1 & -u\cos v\\ 0 & -u\sin v\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin v}{e^{u}(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}0 & -u\cos v\\ 1 & -u\sin v\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-\cos v}{e^{u}(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-e^{u}-\sin v & 1\\ -e^{u}+\cos v & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\cos v-e^{u}}{u[e^{u}(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-e^{u}-\sin v & 0\\ -e^{u}+\cos v & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin v+e^{u}}{u[e^{u}(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一　由方程组 $\begin{cases}y=f(x,t),\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $y=y(x)$，$t=t(x)$. 分别在两个方程两端对 x 求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法二　分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两端求全微分,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}y=f_x\mathrm{d}x+f_t\mathrm{d}t, & (1)\\ F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_t\mathrm{d}t=0. & (2)\end{cases}$$

由(2),得

$$F_t\mathrm{d}t=-(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y). \tag{3}$$

将 F_t 乘(1)式两端,并以(3)式代入,得

$$F_t\mathrm{d}y=f_xF_t\mathrm{d}x-f_t(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y),$$

即

$$(F_t+f_tF_y)\mathrm{d}y=(f_xF_t-f_tF_x)\mathrm{d}x.$$

故当 $F_t+f_tF_y\neq 0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$$

习题 9-6　多元函数微分学的几何应用

1. 设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{g}(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{u}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{v}$,证明 $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

证　$\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t)\\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}$

$$=\lim_{t\to t_0}\Big(f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t),f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)\Big)$$

$$=\Big(\lim_{t\to t_0}[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)],\lim_{t\to t_0}[f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t)],\lim_{t\to t_0}[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)]\Big)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \lim\limits_{t\to t_0}f_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0}f_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0}g_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0}g_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0}g_3(t)\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.$$

这个结果表示：两个向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限（向量）的向量积，即

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)]\times[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)].$$

2. 下列各题中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量，以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},t_0=1$;

(2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k},t_0=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=[2\ln(t+1)]\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{k},t_0=1.$

解　(1) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\Big|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$;

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=1}=2\boldsymbol{j}$;

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{5+4t^2}.$

(2) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$;

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\cos t)\boldsymbol{i}-(3\sin t)\boldsymbol{j}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-3\boldsymbol{j}$;

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}|=\sqrt{9\cos^2 t+4\sin^2 t+16}$

$=\sqrt{20+5\cos^2 t}.$

(3) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=\left(\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right)\Big|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=1}=\left[-\dfrac{2}{(t+1)^2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right]_{t=1}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=\left|\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{5t^2+\dfrac{4}{(t+1)^2}}.$

3. 求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$ 在与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程.

解　与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点为 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$，曲线在该点处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(1,1,\sqrt{2})$，于是所求切线方程为

$$\frac{x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0,$$

即 $$x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

4. 求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解　曲线在对应于 $t=1$ 的点为 $\left(\dfrac{1}{2},2,1\right)$,该点处的切向量

$$\boldsymbol{T}=\left(x'(1),y'(1),z'(1)\right)=\left(\frac{1}{(1+t)^2},-\frac{1}{t^2},2t\right)\bigg|_{t=1}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即 $$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

所求法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即 $$2x-8y+16z-1=0.$$

5. 求曲线 $y^2=2mx,z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程.

解　设曲线的参数方程中的参数为 x,将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两端分别对 x 求导,得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2m,\quad 2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left(1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为 $(x-x_0)+\dfrac{m}{y_0}(y-y_0)-\dfrac{1}{2z_0}(z-z_0)=0.$

6. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解法一　为了求$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$,在所给方程两端分别对 x 求导,得

$$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}-3=0,\\2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=-2x+3,\\3\frac{dy}{dx}-5\frac{dz}{dx}=2.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}2y & 2z\\3 & -5\end{vmatrix}=-10y-6z\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-2x+3 & 2z\\2 & -5\end{vmatrix}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}2y & -2x+3\\3 & 2\end{vmatrix}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16},\quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{16}.$$

于是在点(1,1,1)处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}},$$

即

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为

$$(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0,$$

即

$$16x+9y-z-24=0.$$

解法二　所求曲线的切线,也就是曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点(1,1,1)处的切平面与平面 $2x-3y+5z=4$ 的交线,利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases}-(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0,\\2x-3y+5z=4.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-x+2y+2z=3,\\2x-3y+5z=4.\end{cases}$$

这切线的方向向量为(16,9,-1),于是所求法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0,$$

即
$$16x+9y-z-24=0.$$

7. 求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点,使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $x_t=1,y_t=2t,z_t=3t^2$,设所求点对应的参数为 t_0,于是曲线在该点处的切向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2t_0,3t_0^2)$. 已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,由切线与平面平行,得 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即 $1+4t_0+3t_0^2=0$,解得 $t_0=-1$ 和 $-\frac{1}{3}$. 于是所求点为 $(-1,1,-1)$ 或 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

8. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$,则
$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,e^z-1),\quad \boldsymbol{n}\Big|_{(2,1,0)}=(1,2,0).$$
曲面在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为
$$1\cdot(x-2)+2(y-1)+0\cdot(z-0)=0,$$
即
$$x+2y-4=0.$$
曲面在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程为
$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$$

9. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$,则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量
$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2ax,2by,2cz)$$
$$=2(ax,by,cz),$$
在点 (x_0,y_0,z_0) 处的一个法向量为 (ax_0,by_0,cz_0),故曲面在该点处的切平面方程为
$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$
即
$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1.$$
法线方程为
$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$,则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,2z)$. 已知平面的法向量为 $(1,-1,2)$,由已知平面与所求切平面平行,得
$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2},\quad 即\quad x=\frac{1}{2}z,\quad y=-\frac{1}{4}z.$$
代入椭球面方程得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1.$$

解得 $z=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$,则 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$,$y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$.所以切点为

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即
$$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解　令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$,曲面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(6x,2y,2z),$$

曲面在点 $(-1,-2,3)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}\Big|_{(-1,-2,3)}=(-6,-4,6)$,$xOy$ 面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$,记 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 γ,则所求的余弦值为

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{6^2+4^2+6^2}\cdot 1}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证　设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$,则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$,则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

化为截距式,得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

13. 设 $\boldsymbol{u}(t)$,$\boldsymbol{v}(t)$ 是可导的向量值函数,证明:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$.

证 (1)
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\pm\boldsymbol{v}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\pm\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\&=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t),\end{aligned}$$
其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则.

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\\&\quad\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\&=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right]\cdot\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\\&\quad\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{u}(t)\right]\cdot\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]\\&=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t),\end{aligned}$$
其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\lim_{\Delta t\to 0}\left[\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]\\&=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right]\times\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{u}(t)\right]\times\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]\\&=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t),\end{aligned}$$
其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

习题 9－7　方向导数与梯度

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点(1,2)处沿从点(1,2)到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数.

解　按题意,方向 $\boldsymbol{l}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=4,$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1,2)处,沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解　先求切线斜率:在 $y^2=4x$ 两端分别对 x 求导,得
$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4.$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{y},\quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)}=1,$$

切线方向 $\boldsymbol{l}=(1,1)$, $\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

又
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}.$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解　先求切线斜率:在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两端分别对 x 求导,得
$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{b}{a},$$

法线斜率为
$$k'=-\frac{1}{k}=\frac{a}{b},$$

内法线方向 $\boldsymbol{l}=(-b,-a)$，$\boldsymbol{e}_l=\left(-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

又 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}=-\frac{\sqrt2}{a},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}=-\frac{\sqrt2}{b}.$$

故 $$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}=-\frac{\sqrt2}{a}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{\sqrt2}{b}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点$(1,1,2)$处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$的方向的方向导数.

解 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz,\dfrac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=-1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)}=11.$$

$$\boldsymbol{e}_l=\left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac12,\frac{\sqrt2}{2},\frac12\right),$$

所以 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=-1\cdot\frac12+0+11\cdot\frac12=5.$$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点$(5,1,2)$处沿从点$(5,1,2)$到点$(9,4,14)$的方向的方向导数.

解 按题意，方向 $\boldsymbol{l}=(4,3,12)$，$\boldsymbol{e}_l=\left(\dfrac{4}{13},\dfrac{3}{13},\dfrac{12}{13}\right)$.

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=10,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=5,$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)}=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点$(1,1,1)$处，沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向.

因为 $x_t=1,y_t=2t,z_t=3t^2$，所以曲线在点$(1,1,1)$处的切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{e}_T=\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$. 又

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2,$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{(1,1,1)}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解　设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$，于是球面在 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线方向向量可取为

$$\boldsymbol{l}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,2z_0),$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\quad \cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\\&=1\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\\&=\frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\\&=x_0+y_0+z_0.\end{aligned}$$

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}\,f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}\,f(1,1,1)$.

解

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,f(x,y,z)&=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}\\&=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{grad}\,f(1,1,1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}.$$

9. 设函数 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\nabla(cu)=c\nabla u$（其中 c 为常数）；

(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$；

(3) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$；

(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

证　(1)

$$\begin{aligned}\nabla(cu)&=\left(c\frac{\partial u}{\partial x},c\frac{\partial u}{\partial y},c\frac{\partial u}{\partial z}\right)=c\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=c\nabla u.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla(u\pm v)&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\pm\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\pm\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$= \nabla u \pm \nabla v.$$

(3)
$$\nabla(uv) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv), \frac{\partial}{\partial y}(uv), \frac{\partial}{\partial z}(uv)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}v + u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$= v\nabla u + u\nabla v.$$

(4)
$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}, \frac{v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right)$$
$$= \frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{u}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}.$$

10. 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $P_0(1, -1, 2)$ 处变化最快的方向,并求沿这个方向的方向导数.

解
$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} = y^2z\boldsymbol{i} + 2xyz\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k},$$
$$\nabla u\big|_{P_0} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

由方向导数与梯度的关系可知,$u = xy^2z$ 在 P_0 处沿 $\boldsymbol{n} = \nabla u\big|_{P_0} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 的方向增加最快,其方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P_0} = \left|\nabla u\big|_{P_0}\right| = |2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}| = \sqrt{21};$$

沿 $\boldsymbol{n}_1 = -\nabla u\big|_{P_0} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ 方向减少最快,其方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{P_0} = -\sqrt{21}.$$

习题 9-8 多元函数的极值及其求法

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2+y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是(　　).

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点(0,0)是$f(x,y)$的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断(0,0)是否为$f(x,y)$的极值点

解 令$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,则由题设可知

$$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4),$$

当$(x,y)\to(0,0)$时,$\rho\to 0$.

由于$f(x,y)$在(0,0)附近的值主要由xy决定,而xy在(0,0)附近符号不定,故点(0,0)不是$f(x,y)$的极值点,即应选(A).

本题也可以取两条路径$y=x$和$y=-x$来考虑.当$|x|$充分小时,

$$f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)>0,\quad f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)<0,$$

故点(0,0)不是$f(x,y)$的极值点,即应选(A).

2. 求函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases}f_x=4-2x=0,\\ f_y=-4-2y=0,\end{cases}$$

求得驻点$(2,-2)$.

又 $A=f_{xx}(2,-2)=-2<0,\quad B=f_{xy}(2,-2)=0,$

$$C=f_{yy}(2,-2)=-2,\quad AC-B^2>0,$$

由判定极值的充分条件知:在点$(2,-2)$处,函数取得极大值$f(2,-2)=8$.

3. 求函数$f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases}f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0,\\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0.\end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=4,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=6,\\ y_4=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_5=6,\\ y_5=4.\end{cases}$$

于是,得驻点(0,0),(0,4),(3,2),(6,0),(6,4).

又 $$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2),$$

$$f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y),$$

$$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2).$$

由判定极值的充分条件知:

在点(0,0)处,$A=f_{xx}(0,0)=0,B=f_{xy}(0,0)=24,C=f_{yy}(0,0)=0,AC-B^2=-24^2<0$,故$f(0,0)$不是极值;

在点(0,4)处,$A=f_{xx}(0,4)=0,B=f_{xy}(0,4)=-24,C=f_{yy}(0,4)=0,AC-B^2=-(-24)^2<0$,故$f(0,4)$不是极值;

在点(3,2)处,$A=f_{xx}(3,2)=-8<0$,$B=f_{xy}(3,2)=0$,$C=f_{yy}(3,2)=-18$,$AC-B^2=144>0$,故函数在点(3,2)处取得极大值,极大值为$f(3,2)=36$;

在点(6,0)处,$A=f_{xx}(6,0)=0$,$B=f_{xy}(6,0)=-24$,$C=f_{yy}(6,0)=0$,$AC-B^2=-(-24)^2<0$,故$f(6,0)$不是极值;

在点(6,4)处,$A=f_{xx}(6,4)=0$,$B=f_{xy}(6,4)=24$,$C=f_{yy}(6,4)=0$,$AC-B^2=-24^2<0$,故$f(6,4)$不是极值.

4. 求函数$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0, \\ f_y = e^{2x}(2y+2)=0, \end{cases}$$

求得驻点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

又

$$A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e>0,\quad B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0,$$

$$C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e,\quad AC-B^2=4e^2>0,$$

由判定极值的充分条件知,在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处,函数取得极小值

$$f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}.$$

5. 求函数$z=xy$在适合附加条件$x+y=1$下的极大值.

解 本题属条件极值问题,易将它化为无条件极值问题.

条件$x+y=1$可表示成$y=1-x$,代入$z=xy$,则问题化为求$z=x(1-x)$的极大值.

由$\frac{dz}{dx}=1-2x=0$,得$x=\frac{1}{2}$.又

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0.$$

由一元函数取得极值的充分条件知,$x=\frac{1}{2}$为极大值点,极大值为

$$z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

6. 从斜边之长为l的一切直角三角形中,求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为x,y,则周长

$$S=x+y+l\quad(0<x<l,0<y<l).$$

本题是求周长S在$x^2+y^2=l^2$条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

令

$$\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0,\\ L_y=1+2\lambda y=0.\end{cases}$$

解得 $x=y=-\dfrac{1}{2\lambda}$. 代入 $x^2+y^2=l^2$，得 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2l}$，于是 $x=y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$，$\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)$是唯一可能的极值点，根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在，所以在斜边之长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形.

注　条件极值的解法，一般是采用拉格朗日乘数法求解. 但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点，究竟这些点是否为极值点以及是极大点还是极小点尚需进一步判断. 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定. 在特殊情形下，条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小.

解　设水池的长为 a，宽为 b，高为 c，则水池的表面积为

$$A=ab+2ac+2bc(a>0,b>0,c>0).$$

约束条件 $abc=k$.

作拉格朗日函数 $L(a,b,c)=ab+2ac+2bc+\lambda(abc-k)$. 由

$$\begin{cases}L_a=b+2c+\lambda bc=0,\\ L_b=a+2c+\lambda ac=0,\\ L_c=2a+2b+\lambda ab=0,\\ abc=k,\end{cases}$$

解得 $a=b=\sqrt[3]{2k}$，$c=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$，$\lambda=-\sqrt[3]{\dfrac{32}{k}}$.

$\left(\sqrt[3]{2k},\sqrt[3]{2k},\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$是唯一可能的极值点，由问题本身可知 A 一定有最小值，所以表面积最小的水池的长和宽都应为 $\sqrt[3]{2k}$，高为$\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

8. 在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解　设所求点为(x,y)，则此点到三直线的距离依次为：$|x|$，$|y|$，$\dfrac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$，三距离平方之和为

$$z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0\end{cases}$$

求得唯一可能的极值点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$. 根据问题本身可知,距离平方和最小的点必定存在,故所求点即为$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时,才可使圆柱体的体积为最大?

解　设矩形的一边长为 x,则另一边长为 $p-x$,假设矩形绕长为 $p-x$ 的一边旋转,则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2(p-x)$. 由

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=2\pi x(p-x)-\pi x^2=\pi x(2p-3x)=0,$$

求得驻点为 $x=\dfrac{2}{3}p$.

由于驻点唯一,由题意又可知这种圆柱体一定有最大值,所以当矩形的边长为$\dfrac{2p}{3}$和$\dfrac{p}{3}$时,绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解　设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,(x,y,z)是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点,则此长方体的长、宽、高分别为 $2x,2y,2z$,体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

令

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2),$$

由

$$\begin{cases}L_x=8yz+2\lambda x=0,\\ L_y=8xz+2\lambda y=0,\\ L_z=8xy+2\lambda z=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}4yz+\lambda x=0,\\ 4xz+\lambda y=0,\\ 4xy+\lambda z=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=z=-\dfrac{\lambda}{4}$,代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$,得 $\lambda=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$,故$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$为唯一可能的极值点. 由于内接于球且有最大体积的长方体必定存在,所以当长方体的长、宽、高都为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$时其体积最大.

11. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆. 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解　设椭圆上的点为(x,y,z),则椭圆上的点到原点的距离平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2.$$

x,y,z 满足条件:$z=x^2+y^2$,$x+y+z=1$.

作拉格朗日函数

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, & (1) \\ L_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \\ L_z = 2z + \lambda + \mu = 0. & (3) \end{cases}$$

(1) - (2),得

$$(1-\lambda)(x-y) = 0.$$

故有 $\lambda = 1$ 或 $x = y$.

由 $\lambda = 1 \Rightarrow \mu = 0, z = -\frac{1}{2}$,不合题意,故舍去.

将 $x = y$ 代入 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 1$,得

$$z = 2x^2, 2x + z = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

解得

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad z = 2 \mp \sqrt{3}.$$

于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right), \quad M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right).$$

由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在,所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得.而

$$2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{3})^2 = 9 \mp 5\sqrt{3},$$

故最大值与最小值分别为

$$d_{\max} = d_{M_2} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}, \quad d_{\min} = d_{M_1} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

12. 设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.该圆板被加热,以致在点 (x,y) 的温度是 $T = x^2 + 2y^2 - x$,求该圆板的最热点和最冷点.

解　解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. $T_1 = T\Big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)} = -\frac{1}{4}$.

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上,

$$T=2-(x^2+x)=\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，有边界上的最大值 $T_2=\frac{9}{4}$，$x=1$ 时，有边界上的最小值 $T_3=0$.

比较 T_1,T_2 及 T_3 的值知，最热点在 $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$T_{\max}=\frac{9}{4}$，最冷点在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，$T_{\min}=-\frac{1}{4}$.

13. 形状为椭球 $4x^2+y^2+4z^2\leqslant 16$ 的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 小时后在探测器的点 (x,y,z) 处的温度 $T=8x^2+4yz-16z+600$，求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16).$$

令

$$\begin{cases}L_x=16x+8\lambda x=0, & (1)\\ L_y=4z+2\lambda y=0, & (2)\\ L_z=4y-16+8\lambda z=0. & (3)\end{cases}$$

由(1)得 $x=0$ 或 $\lambda=-2$.

若 $\lambda=-2$，代入(2)(3)，得 $y=z=-\frac{4}{3}$. 再将 $y=z=-\frac{4}{3}$ 代入约束条件

$$4x^2+y^2+4z^2=16, \qquad (4)$$

得 $x=\pm\frac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点：$M_1\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$，$M_2\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

若 $x=0$，由(2)(3)(4)解得 $\lambda=0,y=4,z=0$；$\lambda=\sqrt{3},y=-2,z=\sqrt{3}$；$\lambda=-\sqrt{3},y=-2,z=-\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能极值点：$M_3(0,4,0)$，$M_4(0,-2,\sqrt{3})$，$M_5(0,-2,-\sqrt{3})$.

比较 T 在上述五个可能极值点处的数值知：$T|_{M_1}=T|_{M_2}=\frac{1\,928}{3}$ 为最大，故探测器表面最热的点为 $M\left(\pm\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

*习题 9-9 二元函数的泰勒公式

1. 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的泰勒公式.

解 $f(1,-2)=5, f_x(1,-2)=(4x-y-6)\big|_{(1,-2)}=0,$

$f_y(1,-2)=(-x-2y-3)\big|_{(1,-2)}=0,$

$f_{xx}(1,-2)=4, f_{xy}(1,-2)=-1, f_{yy}(1,-2)=-2.$

函数为 2 次多项式，三阶及三阶以上的各偏导数均为零. 又

$$h=x-1,\quad k=y+2.$$

将以上各项代入泰勒公式，便得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(1,-2)+(x-1)f_x(1,-2)+(y+2)f_y(1,-2)+\frac{1}{2!}[(x-1)^2\cdot\\&\quad f_{xx}(1,-2)+2(x-1)(y+2)f_{xy}(1,-2)+(y+2)^2f_{yy}(1,-2)]\\&=5+\frac{1}{2}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2]\\&=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.\end{aligned}$$

2. 求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$ 的三阶泰勒公式.

解 $f_x(x,y)=e^x\ln(1+y),\quad f_y(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y},$

$f_{xx}(x,y)=e^x\ln(1+y),\quad f_{xy}(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y},$

$f_{yy}(x,y)=-\dfrac{e^x}{(1+y)^2},\quad f_{xxx}(x,y)=e^x\ln(1+y),$

$f_{yyy}(x,y)=\dfrac{2e^x}{(1+y)^3}.$

于是

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=k,$$

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(0,0)&=h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)\\&=2hk-k^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(0,0)&=h^3f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2f_{xyy}(0,0)\\&\quad+k^3f_{yyy}(0,0)\\&=3h^2k-3hk^2+2k^3.\end{aligned}$$

又

$$f(0,0)=0,\quad h=x,\quad k=y.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式，便得

$$e^x\ln(1+y)=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3,$$

其中

$$R_3=\frac{1}{4!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta h,\theta k)\right]_{h=x,k=y}$$

$$=\frac{e^{\theta x}}{24}\left[x^4\ln(1+\theta y)+\frac{4x^3y}{1+\theta y}-\frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2}+\frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3}-\frac{6y^4}{(1+\theta y)^4}\right]\quad(0<\theta<1).$$

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.

解
$$f_x(x,y)=\cos x\sin y,\quad f_y(x,y)=\sin x\cos y,$$
$$f_{xx}(x,y)=-\sin x\sin y,\quad f_{xy}(x,y)=\cos x\cos y,$$
$$f_{yy}(x,y)=-\sin x\sin y,\quad f_{xxx}(x,y)=-\cos x\sin y,$$
$$f_{xxy}(x,y)=-\sin x\cos y,\quad f_{xyy}(x,y)=-\cos x\sin y,$$
$$f_{yyy}(x,y)=-\sin x\cos y.$$

于是

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=hf_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+kf_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}k,$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=h^2f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+k^2f_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}h^2+hk-\frac{1}{2}k^2.$$

又

$$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad h=x-\frac{\pi}{4},\quad k=y-\frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式,便得

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\right.$$
$$\left.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\right.$$
$$\left.2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\xi,\eta)\right]_{h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.3\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right].$$

$$\xi=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad \eta=\frac{\pi}{4}+\theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right),\quad 0<\theta<1.$$

4. 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式,计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解　先求函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,1)$ 的三阶泰勒公式.

$$f_x(1,1)=yx^{y-1}\big|_{(1,1)}=1,\quad f_y(1,1)=x^y\ln x\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xx}(1,1)=y(y-1)x^{y-2}\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xy}(1,1)=(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)\big|_{(1,1)}=1,$$

$$f_{yy}(1,1)=x^y\ln^2x\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xxx}(1,1)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xxy}(1,1)=[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]\big|_{(1,1)}=1,$$

$$f_{xyy}(1,1)=(2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2x)\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{yyy}(1,1)=x^y\ln^3x\big|_{(1,1)}=0.$$

又

$$f(1,1)=1,\quad h=x-1,\quad k=y-1.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$x^y=1+(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+\frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)]+R_3$$

$$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3.$$

因此

$$1.1^{1.02}\approx 1+0.1+0.1\times 0.02+\frac{1}{2}\times 0.1^2\times 0.02$$

$$=1+0.1+0.002+0.0001=1.1021.$$

5. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 的 n 阶泰勒公式.

解　$f(0,0)=1,\quad f_x(0,0)=e^{x+y}\big|_{(0,0)}=1,\quad f_y(0,0)=e^{x+y}\big|_{(0,0)}=1,\cdots,$

$$f^{(n)}_{x^m y^{n-m}}(0,0)=e^{x+y}\big|_{(0,0)}=1\ (m=0,1,\cdots,n).$$

又

$$h=x,\quad k=y.$$

将以上各项代入 n 阶泰勒公式,便得

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+y)^k}{k!}+R_n,$$

其中

$$R_n=\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x+y)}\quad(0<\theta<1).$$

*习题 9-10 最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p,其熔解温度(℃)为 θ,由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

p/%	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ/℃	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和,即

$$M = \sum_{i=1}^{6} [\theta_i - (ap_i + b)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -\sum\limits_{i=1}^{6} 2p_i[\theta_i - (ap_i + b)] = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = -\sum\limits_{i=1}^{6} 2[\theta_i - (ap_i + b)] = 0. \end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{6} p_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{6} p_i = \sum\limits_{i=1}^{6} \theta_i p_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{6} p_i + 6b = \sum\limits_{i=1}^{6} \theta_i. \end{cases}$$

计算,得

$$\sum_{i=1}^{6} p_i^2 = 28\,365.28, \quad \sum_{i=1}^{6} p_i = 396.6,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \theta_i p_i = 101\,176.3, \quad \sum_{i=1}^{6} \theta_i = 1\,458.$$

代入方程组,得

$$\begin{cases} 28\,365.28a + 396.6b = 101\,176.3, \\ 396.6a + 6b = 1\,458. \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{4\,802.5}{2\,150.02} = 2.234,$$

$$b = \frac{572.0}{6} = 95.33.$$

所以经验公式为 $\theta = 2.234p + 95.33$.

2. 已知一组实验数据为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立 a,b,c 应满足的三元一次方程组.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和,即

$$M=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i^2=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial c}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0.\end{cases}$$

整理,得 a,b,c 应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

总习题九

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的________条件,$f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件;

(2) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件,$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在的________条件;

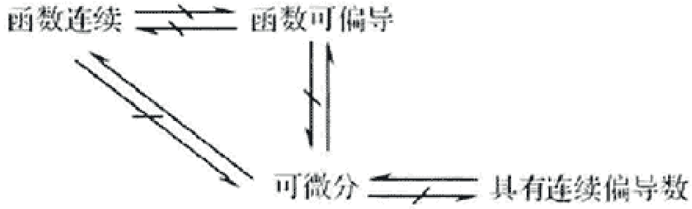
(3) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件;

(4) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的________条件.

解 (1) 充分,必要. (2) 必要,充分.

(3) 充分. (4) 充分.

注　本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微分及具有连续偏导数之间的联系，用图表可表示为



2. 下题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=-1$，则有(　　)．

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$

解　函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在，不一定可微分，故(A)不对．

由于函数存在偏导数不能保证可微分，从而不能保证曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处存在切平面，因而(B)不对；若 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处存在连续偏导数，曲面在该点处有切平面，其法向量是 $(3,-1,-1)$，而不是 $(3,-1,1)$，故(B)也不对．

取 x 为参数，则曲线 $x=x,y=0,z=f(x,0)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个切向量为 $(1,0,3)$，故(C)正确．

3. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，并求 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)$．

解　函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1,y^2\leqslant 4x\}$．

因为点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)\in D$，$f(x,y)$ 为初等函数，所以

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)=f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{\sqrt{2}}{\ln\dfrac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\ln 3-\ln 4}.$$

*4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在．

证　取两条趋于 $(0,0)$ 的路径，$c_1:x=0$，$c_2:y^2=x$．

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

由于(x,y)分别沿 c_1,c_2 趋于$(0,0)$时$f(x,y)$的极限不相等,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

求$f_x(x,y)$及$f_y(x,y)$.

解　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z=\ln(x+y^2)$;　　(2) $z=x^y$.

解　(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x.$$

7. 求函数 $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解
$$\Delta z=\frac{2.01\cdot 1.03}{2.01^2-1.03^2}-\frac{2}{3}=0.03.$$

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2},$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9}.$$

故
$$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=1,\Delta y=0.03}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta y=0.03.$$

*8. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明:$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续且偏导数存在,但不可微分.

证　因为

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

又 $f(0,0)=0$,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$,即 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$
$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}},$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,故 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处偏导数存在,但不可微分.

9. 设 $u=x^y$,而 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 都是可微函数,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t).$$

10. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而

$$u=\eta-\zeta,\quad v=\zeta-\xi,\quad w=\xi-\eta,$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial \xi},\dfrac{\partial z}{\partial \eta},\dfrac{\partial z}{\partial \zeta}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot e^y+f_x,$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot e^y+f_x)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f_u\right)\cdot e^y+f_u\cdot e^y+\frac{\partial}{\partial y}f_x\\&=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)e^y+f_u\cdot e^y+\left(f_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}\right)\\&=(f_{uu}\cdot xe^y+f_{uy})e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\cdot xe^y+f_{xy}\\&=xe^{2y}f_{uu}+e^yf_{uy}+xe^yf_{xu}+f_{xy}+e^yf_u.\end{aligned}$$

12. 设 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，$z=uv$，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

分别在 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 的两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\[2ex] e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

由以上方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v).$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

分别在 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 的两端对 y 求偏导数，得

$$\begin{cases} e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1. \end{cases}$$

由以上方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(u\cos v+v\sin v).$$

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

解 $$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta,\quad \frac{dz}{d\theta}=b.$$

点 $(a,0,0)$ 所对应的参数 $\theta=0$,故曲线在给定点的切向量

$$\boldsymbol{T}=(0,a,b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b},$$

即

$$\begin{cases} x=a, \\ by-az=0. \end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0)+b(z-0)=0,$$

即

$$ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$,曲面在该点处的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(y_0,x_0,-1)$,平面的法向量为 $(1,3,1)$.

按题意,$\boldsymbol{n}$ 垂直于平面,故有

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0=-3, y_0=-1, z_0=x_0y_0=3$. 于是所求点为 $M(-3,-1,3)$,法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$,求函数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

在点(1,1)沿方向 l 的方向导数,并分别确定角 θ,使这导数有(1)最大值;(2)最小值;(3)等于0.

解
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y,$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1.$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\theta+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

因为 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以

(1) 当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时,方向导数最大,其最大值为$\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ 时,方向导数最小,其最小值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ 或$\dfrac{7}{4}\pi$ 时,方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

解　椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2},\dfrac{z_0}{c^2}\right)$,
$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right).$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}.$$

17. 求平面$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解　设交线上的点为 $M(x,y,z)$,它到 xOy 面上距离的平方为 z^2. 问题就成为求函数 z^2 在约束条件$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下的最小值问题. 作拉格朗日函数
$$L=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \dfrac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \dfrac{\lambda}{5} = 0. \end{cases}$$

又由约束条件,有

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

解此方程组,得 $x = \dfrac{4}{5}, y = \dfrac{3}{5}, z = \dfrac{35}{12}$. 于是,得可能的极值点 $M_0\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{35}{12}\right)$. 由问题本身可知,距离最短的点必定存在,因此 M_0 就是所求的点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面,使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点,并求此最小体积.

解　设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$,

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).$$

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

于是,切平面在三个坐标轴上的截距依次为 $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$,切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

在 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的条件下,求 V 的最小值,即求分母 xyz 的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,z) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0, & (1) \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0, & (2) \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0. & (3) \end{cases}$$

$(1)\cdot x+(2)\cdot y+(3)\cdot z$，并由约束条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},$$

从而

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是，得可能极值点 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$. 由此问题的性质知，所求的切点为 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$，四面体的最小体积为

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1,\quad q_2=10-0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C=35+40(q_1+q_2).$$

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

解法一　总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L=R-C=32p_1-0.2p_1^2-0.05p_2^2+12p_2-1395.$$

由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2}=12-0.1p_2=0. \end{cases}$$

解此方程组，得 $p_1=80$，$p_2=120$.

由问题的实际意义可知，厂家获得总利润最大的市场售价必定存在，故当 $p_1=80,p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为

$$L\Big|_{p_1=80,p_2=120}=605.$$

解法二　两个市场的价格函数分别为

$$p_1=120-5q_1,\quad p_2=200-20q_2,$$

总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$L=R-C=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2-[35+40(q_1+q_2)]$$
$$=80q_1-5q_1^2+160q_2-20q_2^2-35.$$

由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=80-10q_1=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial q_2}=160-40q_2=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $q_1=8,q_2=4$.

由问题的实际意义可知，当 $q_1=8,q_2=4$，即 $p_1=80,p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为

$$L\Big|_{q_1=8,q_2=4}=605.$$

20. 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的闭区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)\in D$，问 $f(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

解　(1) 由梯度与方向导数的关系知，$h=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大，方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x,y)$ 达到最大值的点，只需求 $F(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 达到最大值的点. 因此，作拉格朗日函数

$$L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, & (1) \\ L_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0. & (2) \end{cases}$$

又由约束条件，有

$$75 - x^2 - y^2 + xy = 0. \tag{3}$$

(1)+(2)，得

$$(x + y)(2 - \lambda) = 0,$$

解得 $y = -x$ 或 $\lambda = 2$.

若 $\lambda = 2$，则由(1)得 $y = x$，再由(3)得 $x = y = \pm 5\sqrt{3}$.

若 $y = -x$，则由(3)得 $x = \pm 5, y = \mp 5$.

于是得到四个可能的极值点：

$M_1(5, -5)$，　$M_2(-5, 5)$，　$M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$，　$M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$.

由于 $F(M_1) = F(M_2) = 450, F(M_3) = F(M_4) = 150$，故 $M_1(5, -5)$ 或 $M_2(-5, 5)$ 可作为攀岩的起点.

第十章 重积分

习题 10－1 二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板(不计其厚度),占有 xOy 面上的闭区域 D,薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 Q.

解 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$. 任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷 $\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}\}$.

注 以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 D 分成 n 个小闭区域,取出其中任意一个记作 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记作 $\mathrm{d}\sigma$),(x,y) 为 $\mathrm{d}\sigma$ 上一点,则 $\mathrm{d}\sigma$ 上分布的电荷近似等于 $\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$,记作

$$\mathrm{d}Q=\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma\quad(\text{称为电荷元素}),$$

以 $\mathrm{d}Q$ 作为被积表达式,在 D 上作重积分,即得所求的电荷为

$$Q=\iint_D\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -2\leqslant y\leqslant 2\}$;又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$. 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 由二重积分的几何意义知,I_1 表示底为 D_1、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积;I_2 表示底为 D_2、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积(图 10－1). 由于位于 D_1 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等积的部分,其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2. 由此可知

$$I_1=4I_2.$$

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -2\leqslant y\leqslant 2\}$. 由于 D_1 关于 y 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 x 是偶函

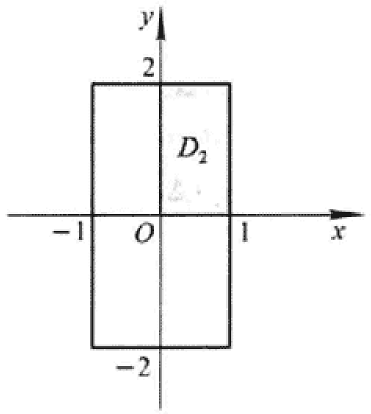


图 10－1

数，故

$$I_1 = \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma.$$

又由于 D_3 关于 x 轴对称，被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 y 是偶函数，故

$$\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

（2）利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意：

如果积分区域 D 关于 x 轴对称，而被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，即 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0;$$

如果积分区域 D 关于 y 轴对称，而被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，即 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. 利用二重积分定义证明：

（1）$\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma = \sigma$（其中 σ 为 D 的面积）；

（2）$\iint\limits_{D}kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$（其中 k 为常数）；

（3）$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=D_1\cup D_2$，D_1，D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证　（1）由于被积函数 $f(x,y)\equiv 1$，故由二重积分定义得

$$\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \sigma.$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$= k \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = k \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 因为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上可积，故不论把 D 怎样分割，积分和的极限总是不变的. 因此在分割 D 时，可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线. 这样 $f(x,y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和，记为

$$\sum_{D_1 \cup D_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{D_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \sum_{D_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda \to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

4. 试确定积分区域 D，使二重积分 $\iint\limits_D (1 - 2x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 达到最大值.

解 由二重积分的性质可知，当积分区域 D 包含了所有使被积函数 $1 - 2x^2 - y^2$ 大于等于零的点，而不包含使被积函数 $1 - 2x^2 - y^2$ 小于零的点，即当 D 是椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 所围的平面闭区域时，此二重积分的值达到最大.

5. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x + y = 1$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$；

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 3 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上，$0 \leqslant x + y \leqslant 1$，故有

$$(x+y)^3 \leqslant (x+y)^2.$$

根据二重积分的性质 4，可得

$$\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y) \mid x + y \geqslant 1\}$ 内，故在 D 上有 $(x+y)^2 \leqslant (x+y)^3$. 从而 $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$.

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$ 内,故知区域 D 上的点满足 $0\leqslant \ln(x+y)\leqslant 1$,从而有 $[\ln(x+y)]^2\leqslant \ln(x+y)$. 因此

$$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y)\mid x+y\geqslant \mathrm{e}\}$ 内,故在 D 上有 $\ln(x+y)\geqslant 1$,从而 $[\ln(x+y)]^2\geqslant \ln(x+y)$. 因此

$$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma.$$

6. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(2) $I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$;

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$;

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上,$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$,从而 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$. 又 D 的面积等于 1,因此

$$0\leqslant \iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma\leqslant 2.$$

(2) 在积分区域 D 上,$0\leqslant \sin x\leqslant 1,0\leqslant \sin y\leqslant 1$,从而 $0\leqslant \sin^2 x\sin^2 y\leqslant 1$,又 D 的面积等于 π^2,因此

$$0\leqslant \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma\leqslant \pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1\leqslant x+y+1\leqslant 4$,$D$ 的面积等于 2,因此

$$2\leqslant \iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma\leqslant 8.$$

(4) 因为在积分区域 D 上有 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,所以有

$$9\leqslant x^2+4y^2+9\leqslant 4(x^2+y^2)+9\leqslant 25.$$

又 D 的面积等于 4π,因此

$$36\pi\leqslant \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma\leqslant 100\pi.$$

习题 10-2 二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$,$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

解 (1)
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

(2) D 可用不等式表示为
$$0\leqslant y\leqslant 2-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2.$$
于是
$$\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^2(4+2x-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}.$$

(3)
$$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x\right]_0^1\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\mathrm{d}y=1.$$

(4) D 可用不等式表示为
$$0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi.$$
于是
$$\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x\int_0^{x}\cos(x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi}x[\sin(x+y)]_0^x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$
$$=\left[x\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\left(-1-\frac{1}{2}\right)-0=-\frac{3}{2}\pi.$$

2. 画出积分区域,并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma$,其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}, y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D xy^2\,d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,d\sigma$,其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解　(1) D 可用不等式表示为

$$x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1\text{(图 10-2)}.$$

于是

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma=\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 x\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^{\frac{7}{4}}-x^4\right)dx=\frac{6}{55}.$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},\quad -2\leqslant y\leqslant 2\text{(图 10-3)},$$

故

$$\iint\limits_D xy^2\,d\sigma=\int_{-2}^2 y^2\,dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^2 y^2(4-y^2)\,dy=\frac{64}{15}.$$

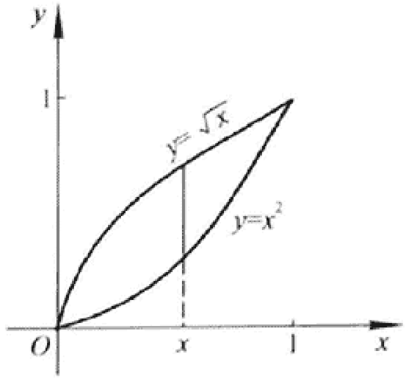


图 10-2

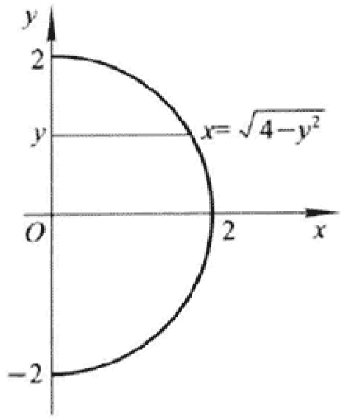


图 10-3

(3) 如图 10-4, $D=D_1\cup D_2$,其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -x-1\leqslant y\leqslant x+1,\ -1\leqslant x\leqslant 0\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x-1\leqslant y\leqslant -x+1, 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\,d\sigma &= \iint_{D_1} e^{x+y}\,d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y}\,d\sigma \\ &= \int_{-1}^{0} e^x dx\int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx\int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\ &= \int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})dx + \int_0^1 (e-e^{2x-1})dx \\ &= e-e^{-1}.\end{aligned}$$

(4) $D:\dfrac{y}{2}\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 2$(图 10－5),故

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2-x)\,d\sigma &= \int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx \\ &= \int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+y^2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}dy \\ &= \int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)dy = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

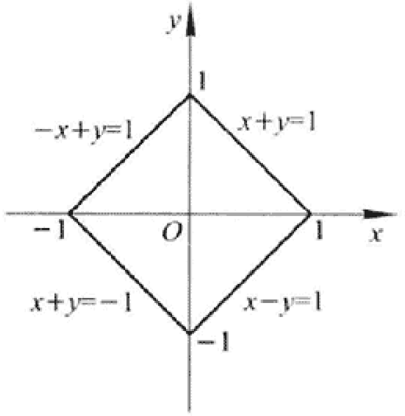


图 10－4

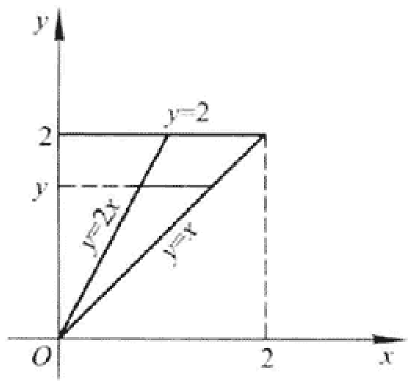


图 10－5

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积,即 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$,积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$,证明这个二重积分等于两个单积分的乘积,即

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\,dxdy = \left[\int_a^b f_1(x)dx\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)dy\right].$$

证 $$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\,dxdy = \int_a^b\left[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy\right]dx.$$

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy$ 中,$f_1(x)$ 与积分变量 y 无关,可视为常数提到积分号外,因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x)\cdot\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]dx.$$

而在这个积分中,由于 $\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$ 为常数,故又可提到积分号外,从而得到

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\cdot\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

证毕.

4. 化二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$ 所围成的闭区域;

(3) 由直线 $y=x,x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成的闭区域;

(4) 环形闭区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解　(1) 直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 的交点为(0,0)和(4,4)(图 10-6). 于是

$$I=\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{4x}}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

或

$$I=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

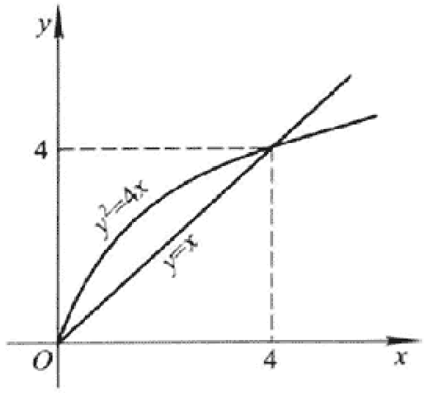


图 10-6

(2) 将 D 用不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqslant x\leqslant r$,于是可将 I 化为如下的先对 y、后对 x 的二次积分:

$$I=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

如将 D 用不等式表示为 $-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{r^2-y^2}$, $0\leqslant y\leqslant r$,则可将 I 化为如下的先对 x、后对 y 的二次积分:

$$I=\int_0^r \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 如图 10-7. 三条边界曲线两两相交,先求得 3 个交点为 $(1,1)$,$\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(2,2)$. 于是

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

或

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

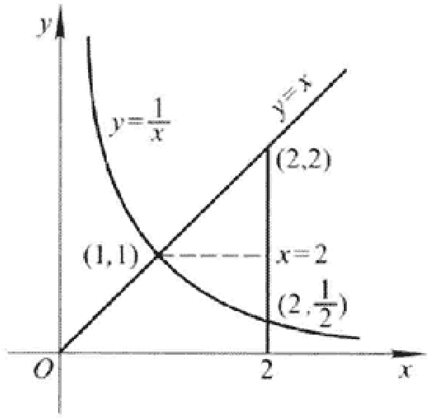


图 10-7

注 本题说明,将二重积分化为二次积分时,需注意根据积分区域的边界曲线的情况,选取恰当的积分次序. 本题中的积分区域 D 的上、下边界曲线均分别由一个方程给出,而左边界曲线却分为两段,由两个不同的方程给出,在这种情况下采取先对 y、后对 x 的积分次序比较有利,这样只需做一个二次积分,而如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

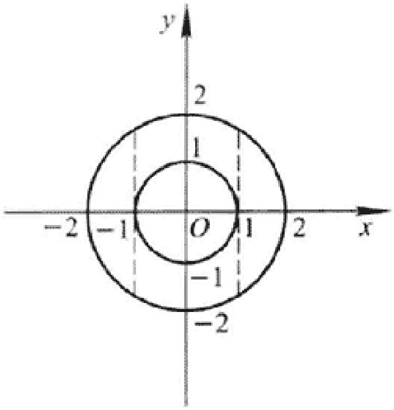
需要指出,选择积分次序时,还需考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特点. 具体例子可见教材下册第 144 页上的例 2.

(4) 将 D 按图 10-8(a)和图 10-8(b)的两种不同方式划分为 4 块,分别得

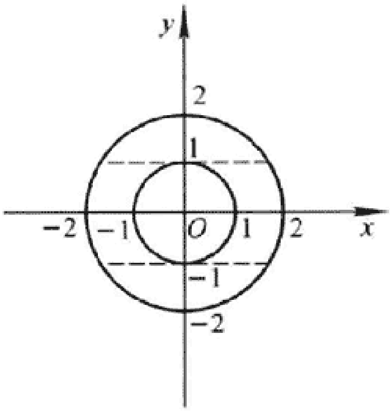
$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y+$$
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

和

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$



(a)



(b)

图 10－8

5. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，其中 D 是由直线 $y=x,y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 所围成的闭区域，证明

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$；　　(2) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$；

(3) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；　　(4) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$；

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；　　(6) $\int_0^{\pi} dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$.

解 (1) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$. D 可改写为 $\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$（图 10－9），于是

$$\text{原式}=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant 2y,0\leqslant y\leqslant 2\}$. 又 D 可表示为 $\left\{(x,y)\mid \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 4\right\}$（图 10－10），因此

$$\text{原式}=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

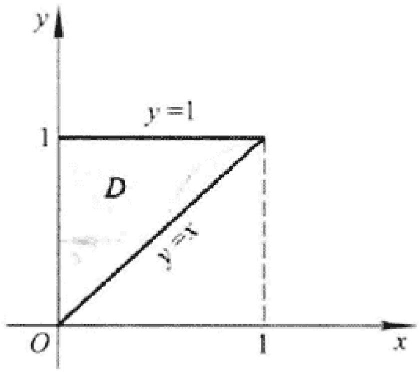


图 10－9

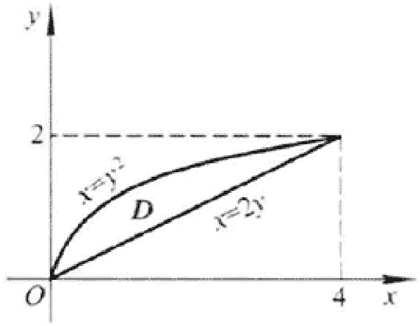


图 10－10

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1\}$ (图 10－11)，因此

$$原式=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2},1\leqslant x\leqslant 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid 2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\}$ (图 10－12)，故

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

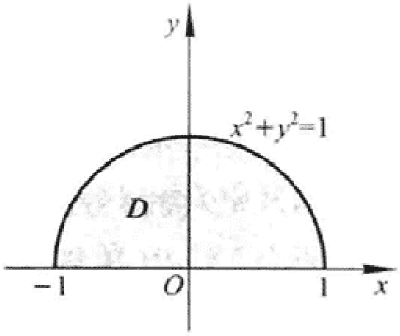


图 10－11

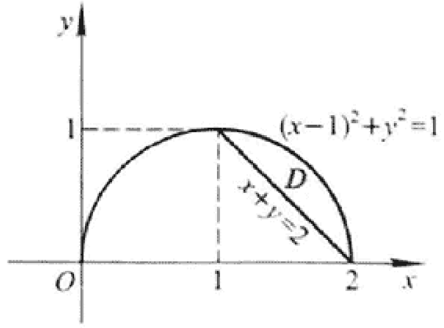


图 10－12

(5) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\ln x,1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant \mathrm{e},0\leqslant y\leqslant 1\}$ (图 10－13)，故

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(6) 如图 10－14，将积分区域 D 表示为 $D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid \arcsin y\leqslant x\leqslant$

$\pi - \arcsin y, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$①$, D_2 = \{(x, y) \mid -2\arcsin y \leqslant x \leqslant \pi, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$. 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx.$$

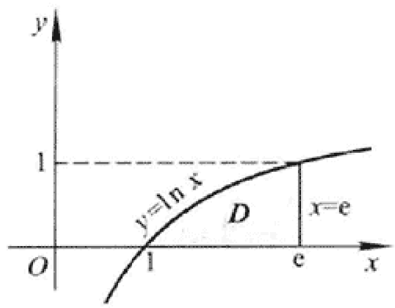


图 10－13

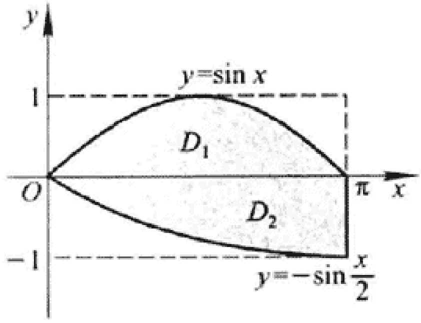


图 10－14

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2, y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

解　D 如图 10－15 所示. 所求薄片的质量

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x,y)\,d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2+y^2)\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3}y^3\right] dy \\ &= \left[-\frac{1}{12}(2-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4\right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

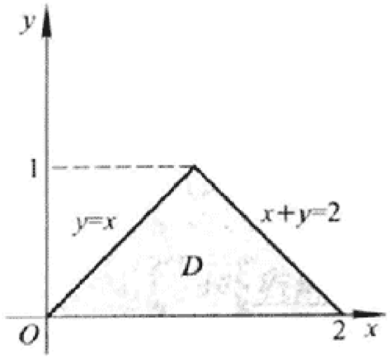


图 10－15

8. 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

① 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=\sin x$ 的反函数是 $x=\arcsin y$. 而当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，$\pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. 于是由 $y=\sin x=\sin(\pi - x)$ 可得 $\pi - x = \arcsin y$，从而得反函数 $x = \pi - \arcsin y$.

解　此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-2x-3y$(图 10-16),因此所求立体的体积

$$V=\iint_D(6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(6-2x-3y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{9}{2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{2}.$$

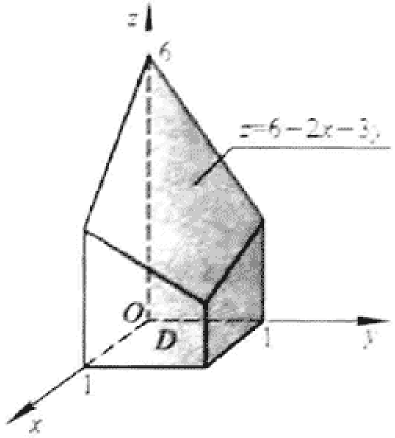


图 10-16

9. 求由平面 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解　此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$(图 10-17),故体积

$$V=\iint_D[6-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[6(1-x)-x^2+x^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{17}{6}.$$

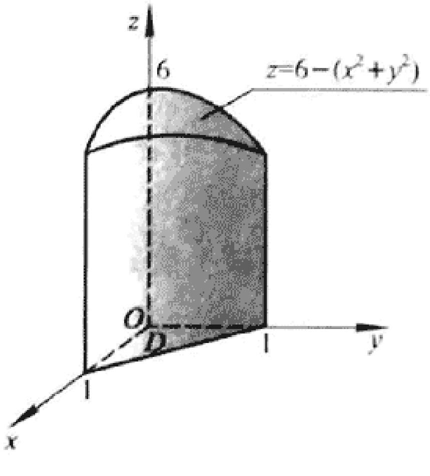


图 10-17

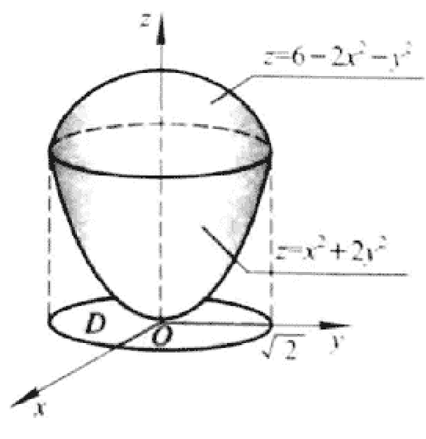


图 10-18

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解　由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2, \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=2$,故所求立体在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}\text{(图 10-18)}.$$

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

$$\begin{aligned} V&=\iint_D(6-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma-\iint_D(x^2+2y^2)\mathrm{d}\sigma \\ &=\iint_D(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=6\pi. \end{aligned}$$

注　求类似于第 8,9,10 题中这样的立体体积时,并不一定要画出立体的准确图形,但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域,并知道立体的底和顶的方程,这就需要复习和掌握第八章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域,把积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分,其中积分区域 D 是:

(1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}(a>0)$;

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$;

(3) $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$,其中 $0<a<b$;

(4) $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

解　(1) 如图 10-19,在极坐标系中,$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

(2) 如图 10-20,在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

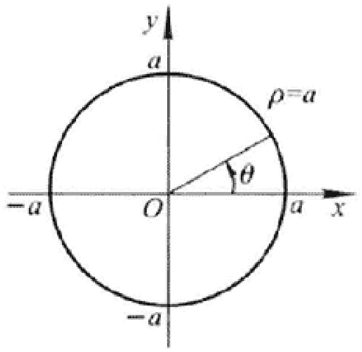


图 10－19

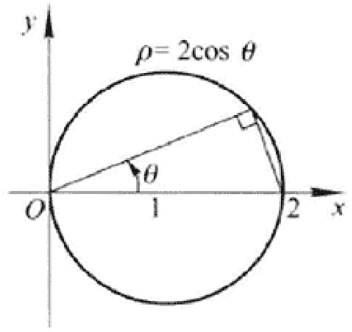


图 10－20

(3) 如图 10－21，在极坐标系中，$D=\{(\rho,\theta)\mid a\leqslant\rho\leqslant b,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，故

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(4) D 如图 10－22 所示. 在极坐标系中，直线 $x+y=1$ 的方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，故 $D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta},0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$. 于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

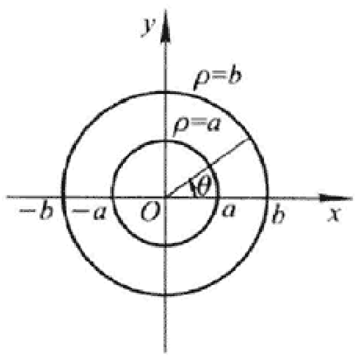


图 10－21

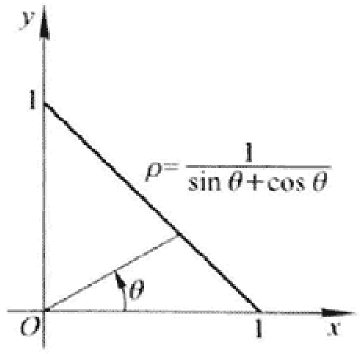


图 10－22

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$； (2) $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$；

(3) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$； (4) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解 (1) 如图 10－23，用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1,D_2 两部分：

$$D_1=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

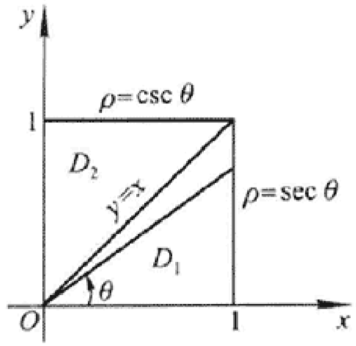


图 10－23

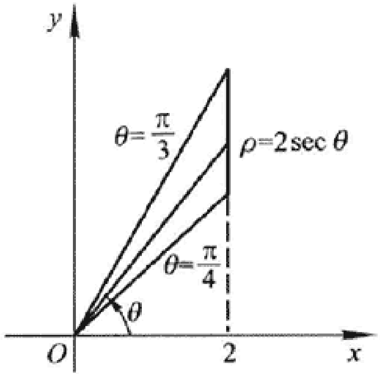


图 10－24

(2) D 如图 10－24 所示. 在极坐标系中，直线 $x=2$，射线 $y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant0)$ 的方程分别是 $\rho=2\sec\theta,\theta=\dfrac{\pi}{4}$和 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. 因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant2\sec\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}.$$

又 $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(\rho)$，于是

$$原式=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(3) D 如图 10－25 所示. 在极坐标系中，直线 $y=1-x$ 的方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的方程为 $\rho=1$，因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant\rho\leqslant1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(4) D 如图 10－26 所示. 在极坐标系中，直线 $x=1$ 的方程是 $\rho=\sec\theta$；抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$，即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$；从原点到两者的交点的射线是 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. 故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\tan\theta\sec\theta\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

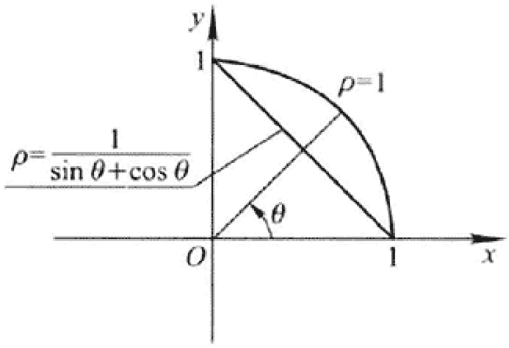


图 10 - 25

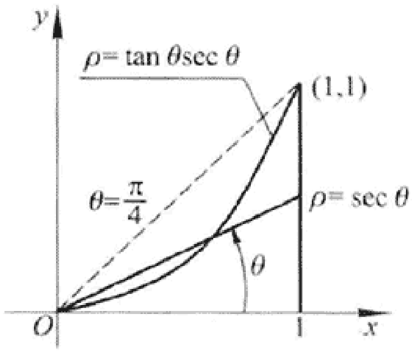


图 10 - 26

13. 把下列积分化为极坐标形式,并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

解　(1) 积分区域 D 如图 10 - 27 所示. 在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi a^4.$$

注　在多元函数积分学的计算题中,常会遇到定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$. 因此记住如下的结果是有益的:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数},\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为大于 1 的正奇数}.\end{cases}$$

(2) 如图 10 - 28, 在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant a\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

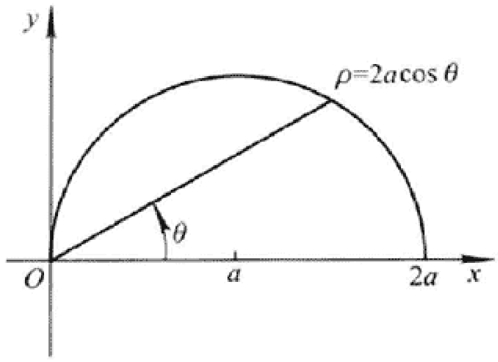


图 10 - 27

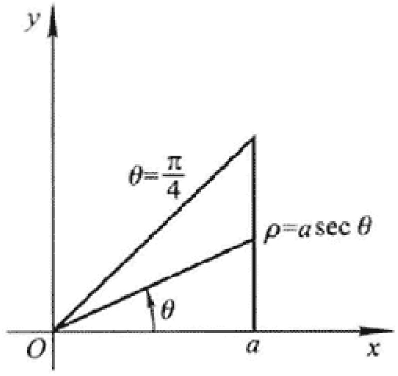


图 10 - 28

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sec\theta} \rho \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^3}{6}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{a^3}{6}\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right].$$

（3）积分区域 D 如图 10 - 29 所示. 在极坐标系中，抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta = \rho^2\cos^2\theta$，即 $\rho = \tan\theta\sec\theta$；射线 $y=x(x\geqslant 0)$ 的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$，故

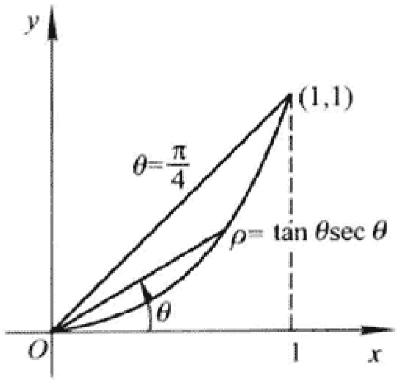


图 10 - 29

$$D = \left\{(\rho,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant \rho \leqslant \tan\theta\sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}.$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\tan\theta\sec\theta} \frac{1}{\rho} \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta\sec\theta \, \mathrm{d}\theta = \left[\sec\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$

(4) 积分区域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2},0\leqslant y\leqslant a\right\}$$
$$=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{8}a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$,$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$,$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中,积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,于是

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{e}^{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\left[\frac{\mathrm{e}^{\rho^2}}{2}\right]_0^2=\pi(\mathrm{e}^4-1).$$

(2) 在极坐标系中,积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,于是

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}(1+\rho^2)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2\rho\,\mathrm{d}\rho\right]$$
$$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$$

(3) 在极坐标系中,积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,1\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$,$\arctan\frac{y}{x}=\theta$,于是

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1)$$
$$=\frac{3}{64}\pi^2.$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2, y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y) \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2\}$.

解 (1) D 如图 10－30 所示. 根据 D 的形状，选用直角坐标较宜. $D=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant x, 1 \leqslant x \leqslant 2\right\}$，故

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 (-x+x^3)\mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

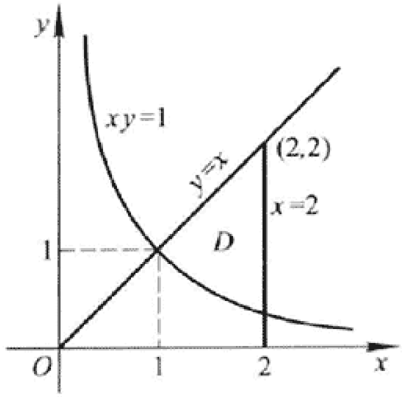


图 10－30

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点，选用极坐标为宜. $D=\left\{(\rho,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$，故

$$\text{原式} = \iint\limits_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho - \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}(1-\rho^4)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin\rho^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^4}\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}(\pi - 2).$$

(3) D 如图 10－31 所示. 选用直角坐标为宜. 又根据 D 的边界曲线的情况,宜采用先对 x、后对 y 的积分次序. 于是

$$\iint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2 + y^2)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^{3a}\left(2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}y = 14a^4.$$

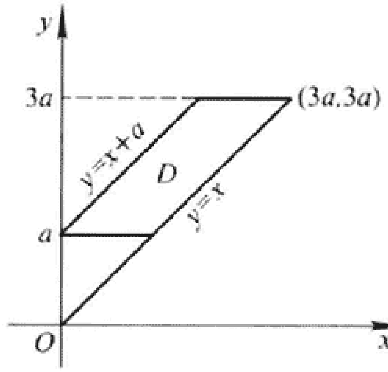


图 10－31

(4) 本题显然适于用极坐标计算. $D = \{(\rho,\theta) \mid a \leqslant \rho \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \rho \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b \rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho = 2\theta$ 上一段弧 $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围成,它的面密度为 $\mu(x,y) = x^2 + y^2$. 求这薄片的质量.

解 薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域 D 上的二重积分(图 10－32),即

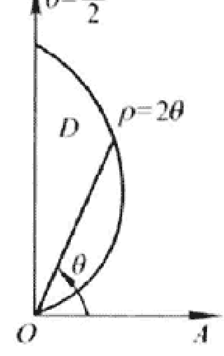


图 10－32

$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D \rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\theta} \rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解　如图 10－33，记 $\alpha=\arctan k$，

$$V = \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = \alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}(R^2-\rho^2)$$

$$= \frac{\alpha R^3}{3} = \frac{R^3}{3}\arctan k.$$

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解　如图 10－34，设

$$D_1 = \{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}, 0\leqslant x\leqslant a\}$$

$$= \left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

由于曲顶柱体关于 zOx 面对称，故

$$V = 2\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_1}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{32}\pi a^4.$$

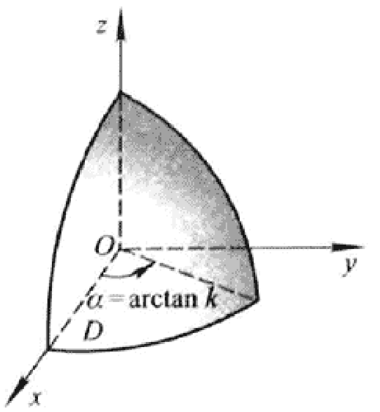


图 10－33

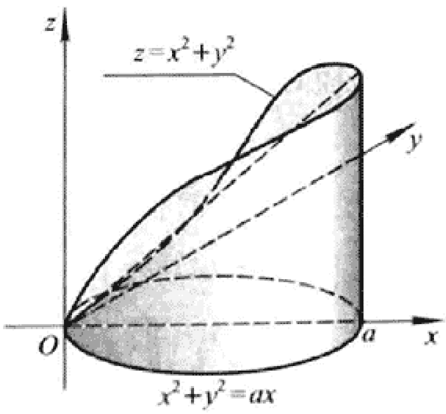


图 10－34

注　在计算立体体积时，要注意充分利用图形的对称性，这样既能简化运算，也能减少错误.

*19. 作适当的变换，计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是平行四边形闭区域，它的四个顶点是 $(\pi,0)$，$(2\pi,\pi)$，$(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$；

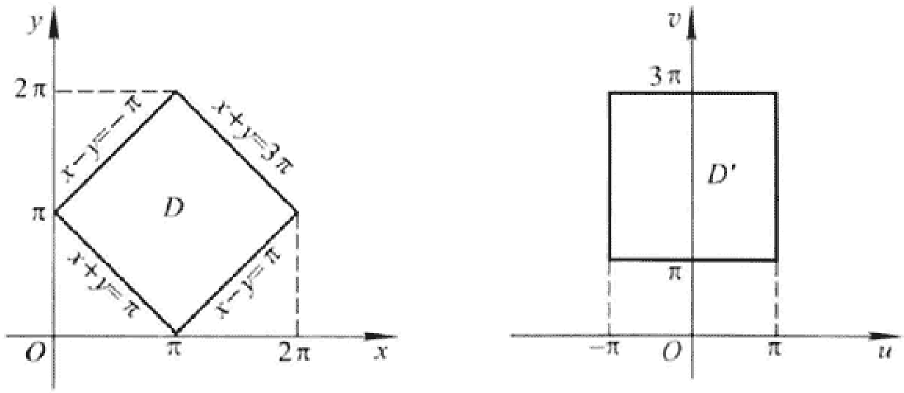
(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$，直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

解　(1) 令 $u=x-y$，$v=x+y$，则 $x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{v-u}{2}$. 在这变换下，D 的边界 $x-y=-\pi$，$x+y=\pi$，$x-y=\pi$，$x+y=3\pi$ 依次与 $u=-\pi$，$v=\pi$，$u=\pi$，$v=3\pi$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是

$$D'=\{(u,v)\mid -\pi\leqslant u\leqslant\pi,\ \pi\leqslant v\leqslant 3\pi\}\ (\text{图 }10-35).$$



(a)　　　　　　(b)

图 10-35

又
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint\limits_{D'} u^2\sin^2 v\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \mathrm{d}u \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v \,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \left[\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4}\right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}.$$

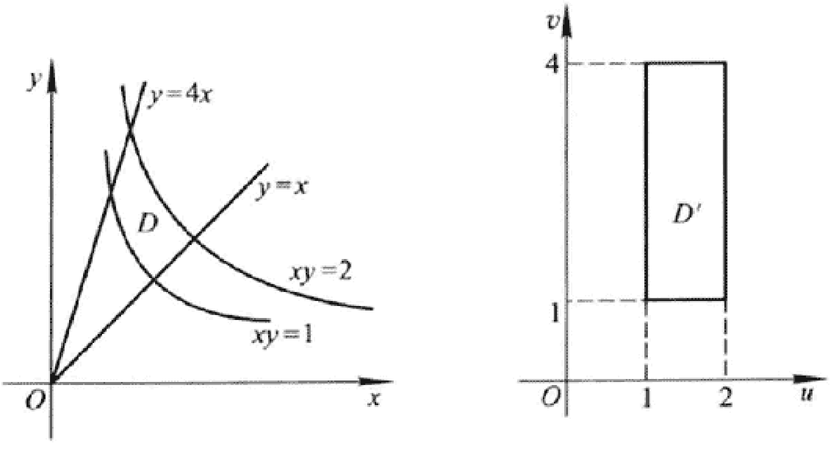
（2）令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$，则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$. 在这变换下，$D$ 的边界 $xy = 1, y = x, xy = 2$，$y = 4x$ 依次与 $u = 1, v = 1, u = 2, v = 4$ 对应，后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D'的边界. 于是 $D' = \{(u,v) \mid 1 \leqslant u \leqslant 2, 1 \leqslant v \leqslant 4\}$（图 10－36）. 又

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2v}.$$

因此

$$\iint_D x^2 y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 u^2 \mathrm{d}u \int_1^4 \frac{1}{v}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{7}{3}\ln 2.$$



(a)　　(b)

图 10－36

（3）令 $u = x + y, v = y$，即 $x = u - v, y = v$，则在这变换下，D 的边界 $y = 0, x = 0$，$x + y = 1$ 依次与 $v = 0, u = v, u = 1$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D'的边界，于是

$$D' = \{(u,v) \mid 0 \leqslant v \leqslant u, 0 \leqslant u \leqslant 1\}.$$

又
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此
$$\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \mathrm{e}^{\frac{v}{u}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{e}^{\frac{v}{u}} \mathrm{d}v = \int_0^1 u(\mathrm{e} - 1)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1).$$

(4) 作广义极坐标变换$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$ $(a>0,b>0,\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 在此变换下,与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$. 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix}=ab\rho.$$

故
$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\rho^2\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}ab\pi.$$

*20. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

(1) D 是由曲线 $xy=4,xy=8,xy^3=5,xy^3=15$ 所围成的第一象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线 $y=x^3,y=4x^3,x=y^3,x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy,v=xy^3\,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$,则 $x=\sqrt{\dfrac{u^3}{v}},y=\sqrt{\dfrac{v}{u}}$. 在这变换下,与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 4\leqslant u\leqslant 8,5\leqslant v\leqslant 15\}$.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u^3}{v^3}} \\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u^3}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{uv}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{1}{v}\mathrm{d}v=2\ln 3.$$

(2) 令 $u=\dfrac{y}{x^3},v=\dfrac{x}{y^3}\,(x>0,y>0)$,则 $x=u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{1}{8}},y=u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}$. 在这变换下,与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 4,1\leqslant v\leqslant 4\}$. 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\dfrac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\dfrac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\dfrac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\dfrac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix}=\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$A=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{8}\left(\left[-2u^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4\right)^2=\frac{1}{8}.$$

*21. 设闭区域 D 是由直线 $x+y=1,x=0,y=0$ 所围成,求证

$$\iint\limits_{D}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sin 1.$$

证 令 $u=x-y, v=x+y$，则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$，在此变换下，$D$ 的边界 $x+y=1$，$x=0, y=0$ 依次与 $v=1, u+v=0$ 和 $v-u=0$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界(图 10-37). 于是

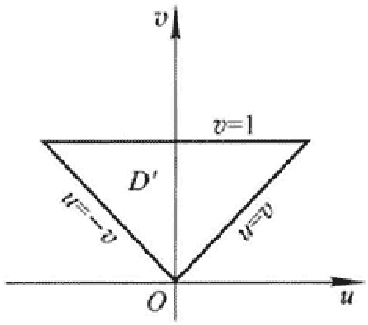


图 10-37

$$D'=\{(u,v) \mid -v\leqslant u\leqslant v, 0\leqslant v\leqslant 1\}.$$

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\sin\frac{u}{v}\right]_{-v}^{v}\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 v\sin 1\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\sin 1.\end{aligned}$$

证毕.

*22. 选取适当的变换，证明下列等式：

(1) $\iint\limits_{D}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$，其中闭区域 $D=\{(x,y) \mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_{D}f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$，其中 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，且 $a^2+b^2\neq 0$.

证 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1, x+y=1, x-y=-1, x-y=1$，故令 $u=x+y, v=x-y$，即 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$. 在此变换下，$D$ 变为 uOv 平面上的闭区域

$$D'=\{(u,v) \mid -1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1\}.$$

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

于是

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(u)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

证毕.

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2}=ax+by,\quad 即\quad u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$,故令 $v=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 这样就有 $u^2+v^2=1$,即 D 的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 变为 uOv 平面上的圆 $u^2+v^2=1$. 于是与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 1\}$.

又由 u,v 的表达式可解得

$$x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=-1,$$

于是

$$\iint_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mid -1\mid\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}v$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u.$$

证毕.

习题 10－3 三重积分

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分,其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0,z=0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$,$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,$z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1) Ω 的顶 $z=xy$ 和底面 $z=0$ 的交线为 x 轴和 y 轴,故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴、y 轴和直线 $x+y-1=0$ 所围成. 于是 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant xy,\quad 0\leqslant y\leqslant 1-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 得 $x^2+y^2=1$,所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant1$(图 10－38). Ω 可用不等式表示为

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,\quad -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(3) 由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}$,消去 z,得 $x^2+y^2=1$. 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant1$(图 10－39). 于是 Ω 可用不等式表示为

$$x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2,\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

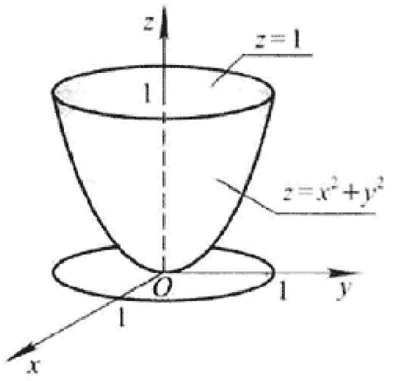


图 10 - 38

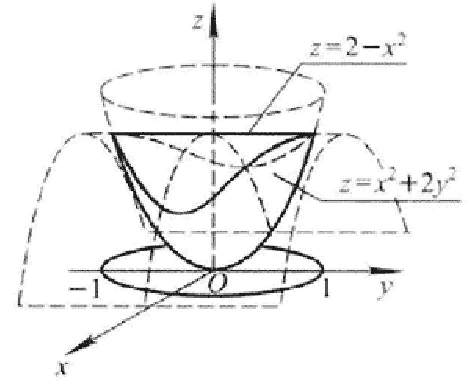


图 10 - 39

(4) 显然 Ω 在 xOy 面上的投影区域由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 和 x 轴、y 轴所围成,Ω 的顶为 $cz=xy$,底为 $z=0$(图 10 - 40). 故 Ω 可用不等式表示为

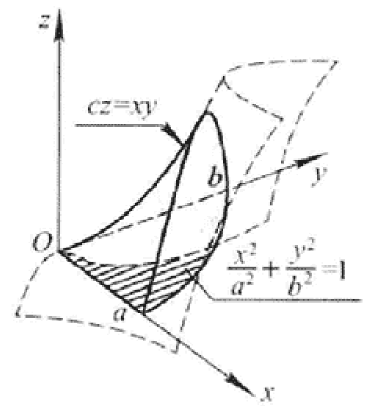


图 10 - 40

$$0\leqslant z\leqslant \frac{xy}{c},\quad 0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

因此

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

注　本题中的 4 个小题,除第 2 小题外,Ω 的图形都不易画出. 但是,为确定三次积分的积分限,并非必须画出 Ω 的准确图形. 重要的是要会求出 Ω 在坐标面上的投影区域,以及会定出 Ω 的顶和底面,而做到这点,只需掌握常见曲面的方程和图形特点,并具备一定的空间想象能力即可. 本章题解中配了较多插图,请读者注意观察,这对培养空间想象能力是有好处的.

2. 设有一物体,占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$,在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$,计算该物体的质量.

解　$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x)$，$f_2(y)$，$f_3(z)$ 的乘积，即 $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$，积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, l\leqslant z\leqslant m\}$，证明这个三重积分等于三个单积分的乘积，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b f_1(x)\,dx \int_c^d f_2(y)\,dy \int_l^m f_3(z)\,dz.$$

证

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dz\right) dy\right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left(f_1(x)f_2(y) \cdot \int_l^m f_3(z)\,dz\right) dy\right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z)\,dz\right) \cdot \left(\int_c^d f_1(x)f_2(y)\,dy\right)\right] dx$$

$$= \left(\int_l^m f_3(z)\,dz\right) \cdot \int_a^b \left[f_1(x) \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_l^m f_3(z)\,dz \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy \cdot \int_a^b f_1(x)\,dx = \text{右端}.$$

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，平面 $y=x$，$x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解　如图 10－41，Ω 可用不等式表示为

$$0 \leqslant z \leqslant xy,\quad 0 \leqslant y \leqslant x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y^2\,dy \int_0^{xy} z^3\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x\,dx \int_0^x x^4y^6\,dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,dx = \frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解　$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1-x-y, 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$（图 10－42），于是

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{y}{8} - \frac{1}{2(1+x+y)} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= -\int_0^1 \left[\frac{1-x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+x)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

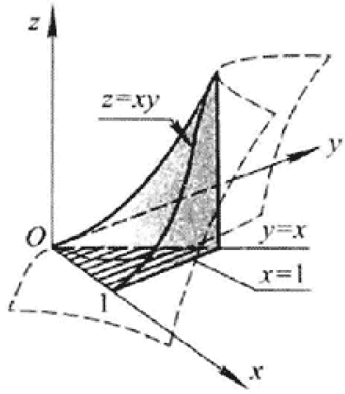


图 10－41

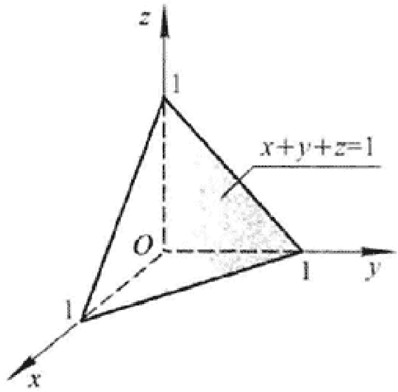


图 10－42

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解法一　利用直角坐标计算. 由于

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1-x^2-y^2}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.$$

* 解法二　利用球面坐标计算. 由于

$$\Omega = \left\{ (r,\varphi,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_\Omega (r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\mathrm{d}r\\ &= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

注　比较本题的两种解法，显然用球面坐标计算要简便得多，这是由本题的积分区域 Ω 的形状所决定的. 一般说来，凡是 Ω 由球面、圆锥面等曲面围成时，用球面坐标计算三重积分较为方便.

7. 计算 $\iiint_\Omega xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0,z=y,y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解法一　容易看出，Ω 的顶为平面 $z=y$，底为平面 $z=0$，Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成. 故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant y, x^2\leqslant y\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1.$$

因此

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^y z\mathrm{d}z\\ &= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\int_{-1}^1 x(1-x^6)\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

解法二　由于积分区域 Ω 关于 yOz 面对称(即若点 $(x,y,z)\in\Omega$，则 $(-x,y,z)$ 也属于 Ω)，且被积函数 xz 关于 x 是奇函数(即 $(-x)z=-(xz)$)，因此

$$\iiint_\Omega xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

8. 计算 $\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解法一　由 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=R^2,$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$(图 10－43)，

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant h,(x,y)\in D_{xy}\right\}.$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[h^2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{h^2}{R^2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{h^2}{2}\cdot\pi R^2 - \frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^3\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

解法二　用过点$(0,0,z)$、平行于xOy面的平面截Ω得平面圆域D_z，其半径为$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Rz}{h}$，面积为$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$(图 10－43).

$$\Omega = \{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z, 0\leqslant z\leqslant h\}.$$

于是
$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^h z\cdot\frac{\pi R^2}{h^2}z^2\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{4h^2}\cdot h^4 = \frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

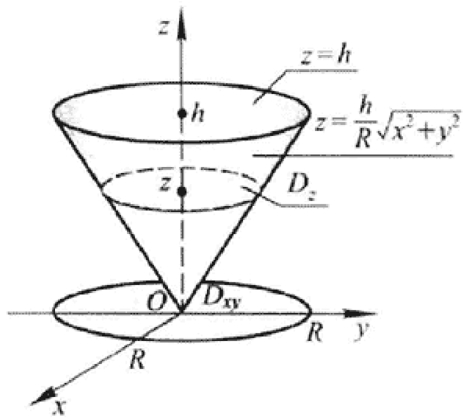


图 10－43

注　解法二通俗地称为“先重后单”法，即先在D_z上作关于x、y的二重积分，然后再对z作定积分．如果在D_z上关于x和y的二重积分易于计算，特别地，如果被积函数与x,y无关，且D_z的面积容易表达为z的函数，则采用这种方法比较简便.

*解法三　用球面坐标进行计算．在球面坐标系中，圆锥面$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$的方程为$\varphi=\alpha\left(=\arctan\frac{R}{h}\right)$，平面$z=h$的方程为$r=h\sec\varphi$，因此$\Omega$可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha, 0\leqslant r\leqslant h\sec\varphi.$$

于是

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{h\sec\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\frac{h^4\sin\varphi}{4\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi=-\frac{\pi h^4}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\left(\text{代入 }\alpha=\arctan\frac{R}{h}\right)$$

$$=\frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{R^2+h^2}{h^2}-1\right)=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_\Omega z\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解　(1) 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z,得

$$(x^2+y^2)^2=2-(x^2+y^2),\text{即 } x^2+y^2=1.$$

从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$(图 10-44). 利用柱面坐标,$\Omega$ 可表示为

$$\rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-\rho^2},0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

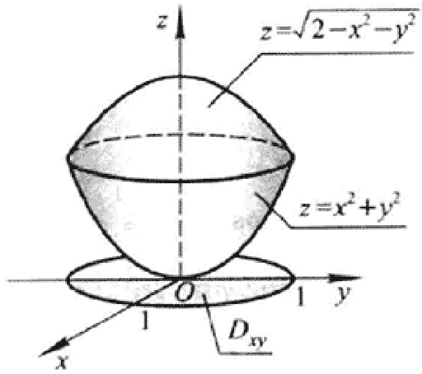


图 10-44

于是

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=\iiint_\Omega z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{7}{12}\pi.$$

(2) 由 $x^2+y^2=2z$ 及 $z=2$ 消去 z 得 $x^2+y^2=4$,从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$. 利用柱面坐标,$\Omega$ 可表示为

$$\frac{\rho^2}{2} \leqslant z \leqslant 2, 0 \leqslant \rho \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3\,d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

*10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_\Omega z\,dv$,其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2, x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

解 (1) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv = \iiint_\Omega r^2 \cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 r^4\,dr$$

$$= 2\pi[-\cos\varphi]_0^\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi.$$

(2) 在球面坐标系中,不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$,即 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$,变为 $r^2\leqslant 2ar\cos\varphi$,即 $r\leqslant 2a\cos\varphi$; $x^2+y^2\leqslant z^2$ 变为 $r^2\sin^2\varphi\leqslant r^2\cos^2\varphi$,即 $\tan\varphi\leqslant 1$,亦即 $\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. 因此 Ω 可表示为

$$0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\text{(图 10 - 45)}.$$

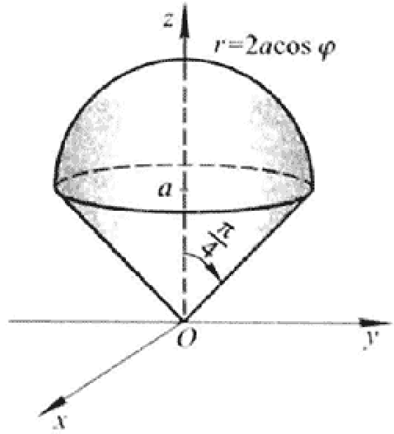


图 10 - 45

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v &= \iiint_{\Omega} r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^3\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= 8\pi a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6}\pi a^4.\end{aligned}$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}v$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域；

*(2) $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

*(4) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A, z\geqslant 0$ 所确定.

解　(1) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$0\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}v &= \iiint_{\Omega}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z \\ &= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[z\right]_0^1 = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

*(2) 在球面坐标系中，球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的方程为 $r^2=r\cos\varphi$，即 $r=\cos\varphi$. Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant\cos\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\text{（图 10 - 46）}.$$

于是

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

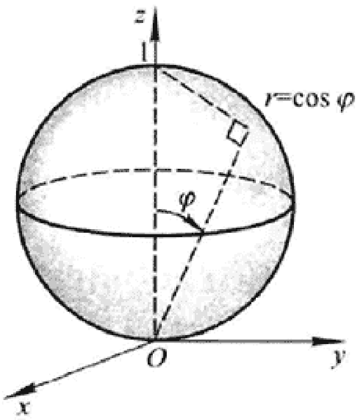


图 10－46

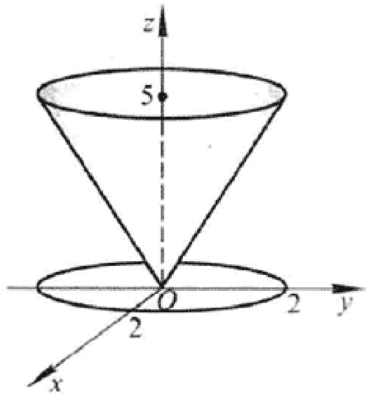


图 10－47

(3) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho\leqslant z\leqslant 5,0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi(\text{图 } 10-47).$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}\rho^4-\frac{1}{2}\rho^5\right]_0^2=8\pi.$$

*(4) 在球面坐标系中, Ω 可表示为

$$a\leqslant r\leqslant A,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{A^5 - a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}(A^5 - a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$；

*(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az(a > 0)$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$（含有 z 轴的部分）；

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$；

(4) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

解　(1) 利用直角坐标计算. 由 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 消去 z，解得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$，即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leqslant 4$. 于是

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 6 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

因此

$$V = \iiint_\Omega dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} [6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}] dxdy \text{（用极坐标）}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - \rho^2 - \rho)\rho d\rho$$

$$= 2\pi\left[3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

注　本题也可用"先重后单"的积分次序求解：

对固定的 z，当 $0 \leqslant z \leqslant 2$ 时，$D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$；当 $2 \leqslant z \leqslant 6$ 时，$D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 6 - z\}$（图 10－48）. 于是

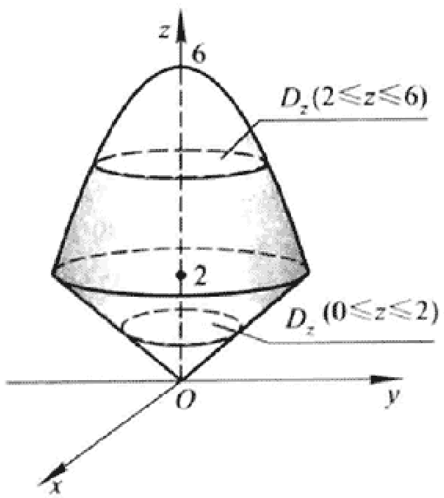


图 10－48

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 = \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_2^6 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \pi z^2 \mathrm{d}z + \int_2^6 \pi(6 - z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{8}{3}\pi + 8\pi = \frac{32}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

*(2) 利用球面坐标计算. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 及圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的球面坐标方程分别为 $r = 2a\cos\varphi$ 和 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 故

$$
\Omega = \left\{(r,\varphi,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}(\text{图 } 10-45).
$$

于是

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8a^3}{3} \sin\varphi\cos^3\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi a^3.
\end{aligned}
$$

注　本题若用"先重后单"的方法计算也很简便.

由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 和 $x^2 + y^2 = z^2$ 解得 $z = a$. 对固定的 z, 当 $0 \leqslant z \leqslant a$ 时, $D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$; 当 $a \leqslant z \leqslant 2a$ 时, $D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2az - z^2\}$. 于是

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 = \int_0^a \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_a^{2a} \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \pi z^2 \mathrm{d}z + \int_a^{2a} \pi(2az - z^2)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 = \pi a^3.
\end{aligned}
$$

(3) 利用柱面坐标计算. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z = \rho$ 和 $z = \rho^2$. 消去 z, 得 $\rho = 1$, 故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho \leqslant 1$ (图 10－49). 因此

$$
\Omega = \{(\rho,\theta,z) \mid \rho^2 \leqslant z \leqslant \rho, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.
$$

于是

$$
V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{\rho} \mathrm{d}z
$$

$$= 2\pi\int_0^1 \rho(\rho - \rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{6}.$$

（本题也可用“先重后单”的方法方便地求得结果，读者可自己练习.）

（4）在直角坐标系中用“先重后单”的方法计算. 由 $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = 4z$ 可解得 $z = 1$.

对固定的 z，当 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时，$D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4z\}$；当 $1 \leqslant z \leqslant \sqrt{5}$ 时，$D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 5 - z^2\}$（图 10－50）. 于是

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{5}}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \pi\cdot 4z\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{5}}\pi(5 - z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi + \pi\left[5z - \frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4).$$

（本题用柱面坐标计算也很方便，请读者自己练习.）

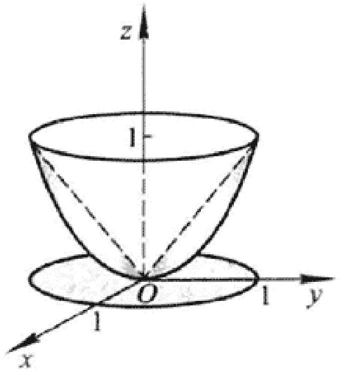


图 10－49

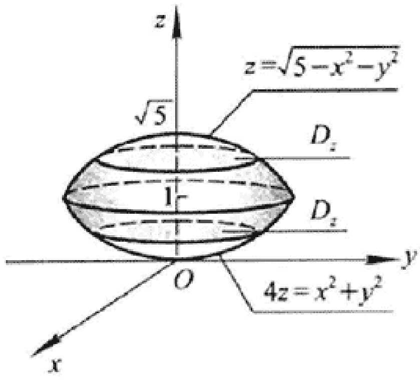


图 10－50

*13. 求球体 $r \leqslant a$ 位于锥面 $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ 和 $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解　用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域，有

$$V = \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\mathrm{d}r = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积.

解　由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z，解得 $x^2 + y^2 = 1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leqslant 1$. 于是

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

因此

$$V = \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} [\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)]\,dxdy\text{(用极坐标)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2)\rho d\rho$$

$$= \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\pi.$$

注 本题也可用"先重后单"的方法按下式方便地求得结果:

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 2-z^2} dxdy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant z} dxdy$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{2}} (2 - z^2)\,dz + \pi\int_0^1 zdz$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\pi.$$

*15. 球心在原点、半径为 R 的球体,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球体的质量.

解 用球面坐标计算. Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$,即 $r \leqslant R$. 按题设,密度函数 $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = kr(k > 0)$. 于是

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega} kr \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr$$

$$= k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = k\pi R^4.$$

习题 10-4 重积分的应用

1. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积.

解 如图 10-51,上半球面的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

由曲面的对称性得所求面积为

$$A = 4\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= 4\iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{(极坐标)}} 4a\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2a^2(\pi-2).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$，故曲面在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$（图 10－52）.

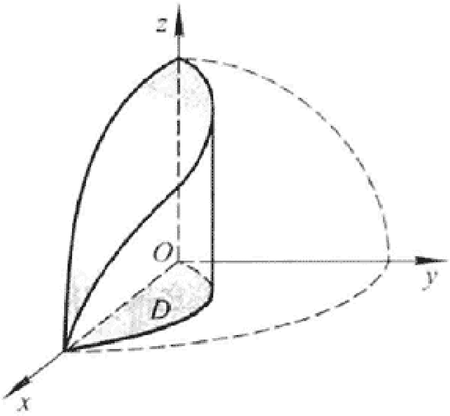


图 10－51

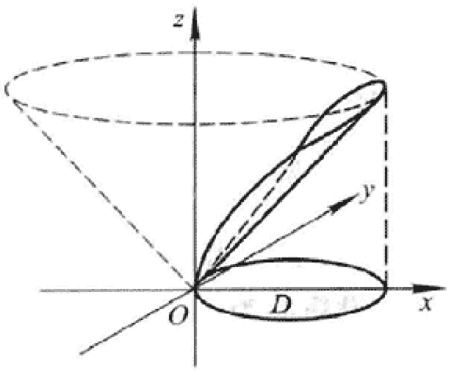


图 10－52

被割曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$A=\iint\limits_D \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\cdot(D\text{ 的面积})=\sqrt{2}\pi.$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 如图 10－53，设第一卦限内的立体表面位于圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 上的那一部分的面积为 A，则由对称性知全部表面的面积为 $16A$.

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$= R\int_0^R \mathrm{d}x = R^2,$$

故全部表面积为 $16R^2$.

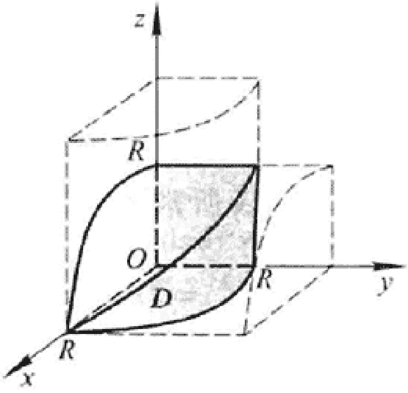


图 10-53

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}, x=x_0, y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$;

(3) D 是介于两个圆 $\rho=a\cos\theta, \rho=b\cos\theta(0<a<b)$ 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为 $(\bar{x},\bar{y})$.

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3},$$

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\sqrt{2px_0^5},$$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}px\mathrm{d}x=\frac{px_0^2}{2},$$

于是

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{5}x_0,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{8}\sqrt{2px_0}=\frac{3}{8}y_0.$$

故所求质心为 $\left(\dfrac{3}{5}x_0,\dfrac{3}{8}y_0\right)$.

(2) 因 D 关于 y 轴对称,故质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 必位于 y 轴上,于是 $\bar{x}=0$.

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab} \cdot \frac{2}{3}ab^2 = \frac{4b}{3\pi}.$$

因此所求质心为 $\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right)$.

(3) 因 D 关于 x 轴对称,故质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 位于 x 轴上,于是 $\bar{y}=0$ (图 10-54).

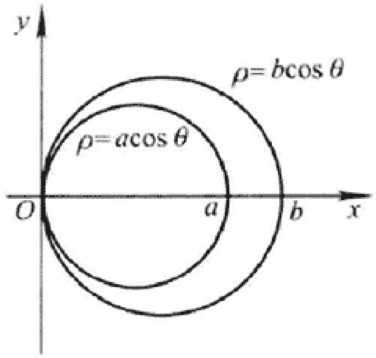


图 10-54

$$A = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(b^2-a^2),$$

$$\begin{aligned}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D \rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(b^3-a^3),\end{aligned}$$

故
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为 $\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成,它在点 (x,y) 处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$,求该薄片的质心.

解
$$\begin{aligned}M &= \iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\frac{1}{2}(x^4-x^6)\mathrm{d}x = \frac{1}{35},\end{aligned}$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} y^2 \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(x^5 - x^8)\mathrm{d}x = \frac{1}{54},$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^3 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} y \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^5 - x^7)\mathrm{d}x = \frac{1}{48},$$

于是
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}.$$

所求质心为 $\left(\frac{35}{48}, \frac{35}{54}\right)$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片,腰长为 a,各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方,求这薄片的质心.

解 如图 10－55,按题设,面密度 $\mu(x,y) = x^2 + y^2$. 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y}$.

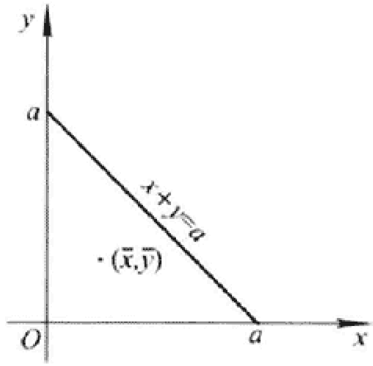


图 10－55

$$M = \iint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a - x) + \frac{(a - x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^4,$$

$$M_y = \iint_D x(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a x\mathrm{d}x \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a \left[x^3(a - x) + \frac{x(a - x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{4}{3}x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + \frac{a^3}{3}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{15}a^5,$$

因此
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5}a, \quad \bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a\right)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho=1$):

(1) $z^2=x^2+y^2, z=1$;

*(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}(A>a>0), z=0$;

(3) $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0$.

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体,其顶点在原点,并关于 z 轴对称,又由于它是匀质的,因此它的质心位于 z 轴上,即有 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 立体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}\bar{z}&=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\iint_{x^2+y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{V}\iint_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{3}{\pi}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

故所求质心为$\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$.

*(2) 立体由两个同心的上半球面和 xOy 面所围成,关于 z 轴对称,又由于它是匀质的,故其质心位于 z 轴上,即有 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 立体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi(A^3-a^3).$$

$$\begin{aligned}\bar{z}&=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^3\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{2\pi(A^3-a^3)}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A^4-a^4}{4}\\&=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)},\end{aligned}$$

故立体质心为$\left(0,0,\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$.

(3) 如图 10-56, $\Omega=\{(x,y,z)\mid0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a-x,0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\}$.

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z\\&=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

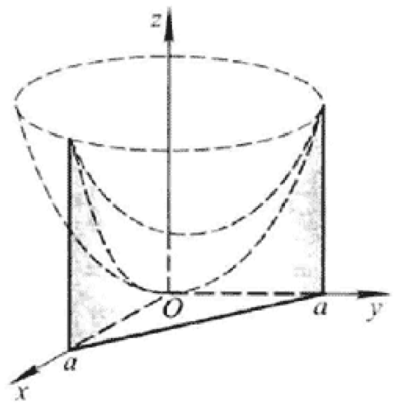


图 10－56

$$= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[ax^2 - x^3 + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{1}{6}a^4,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V}\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy$$

$$= \frac{1}{2V}\int_0^a \left[x^4(a-x) + \frac{2}{3}x^2(a-x)^3 + \frac{1}{5}(a-x)^5 \right] dx$$

$$= \frac{3}{a^4} \cdot \frac{7a^6}{90} = \frac{7}{30}a^2,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} x dv = \frac{1}{V}\int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^a x\left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx$$

$$= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2}{5}a,$$

由于立体匀质且关于平面 $y = x$ 对称，故

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$.

*8. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz\}$，它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的质心.

解 在球面坐标系中，Ω 可表示为

$$0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

球体内任意一点 (x,y,z) 处的密度大小为

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称，故可知其质心位于 z 轴上，因此 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$M = \iiint_\Omega \rho \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}R^5\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega \rho z\mathrm{d}v = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6}R^6\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{4}R,$$

故球体的质心为 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

注 从以上两题的题解可看出，在计算立体的质心时，要注意利用对称性来减少运算量. 对匀质立体来说，只要考虑立体几何形状的对称性（如第 7 题）；但对非匀质立体来说，除了立体的几何形状的对称性外，还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性（如第 8 题）.

9. 设均匀薄片（面密度为常数 1）所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量：

（1）$D = \left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$，求 I_y；

（2）D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成，求 I_x 和 I_y；

（3）D 为矩形闭区域 $\{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$，求 I_x 和 I_y.

解 （1）$I_y = \iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y$

$$= \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x.$$

令 $x = a\sin t$，换元，则

$$\text{上式} = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2 t\cos t \cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 4a^3b\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t\right]$$

$$= 4a^3b\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$$

(2) 如图 10－57, $D=\left\{(x,y)\left|-3\sqrt{\frac{x}{2}}\leqslant y\leqslant 3\sqrt{\frac{x}{2}},0\leqslant x\leqslant 2\right.\right\}$.

$$I_x=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{72}{5},$$

$$I_y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^2x^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^2\frac{3}{\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{96}{7}.$$

(3) $I_x=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y=\frac{ab^3}{3},$

$I_y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y=\frac{a^3b}{3}.$

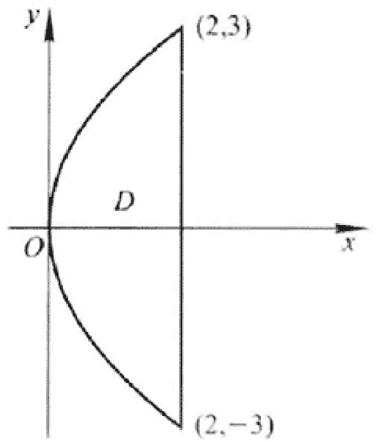


图 10－57

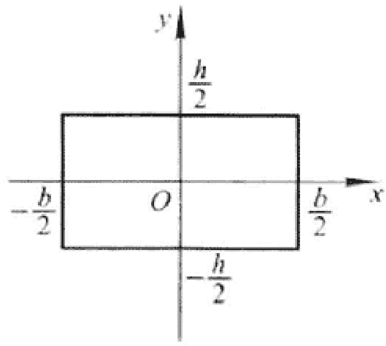


图 10－58

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h, 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解　建立如图 10－58 的坐标系, 使原点 O 为矩形板的形心, x 轴和 y 轴分别平行于矩形的两边, 则所求的转动惯量为

$$I_x=\iint_D y^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\mu bh^3,$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\mu hb^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成.

（1）求物体的体积；

（2）求物体的质心；

（3）求物体关于 z 轴的转动惯量.

解　（1）如图 10－59，由 Ω 的对称性可知

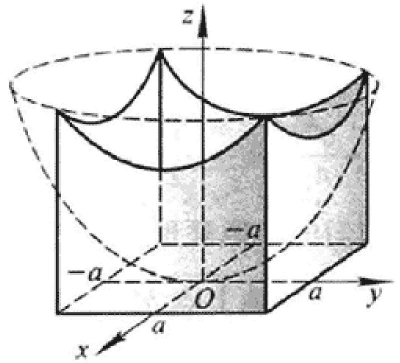


图 10－59

$$V = 4\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2} dz$$

$$= 4\int_0^a dx\int_0^a (x^2+y^2)dy$$

$$= 4\int_0^a \left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)dx = \frac{8}{3}a^4.$$

（2）由对称性可知，质心位于 z 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega \rho z dv \xlongequal{\text{对称性}} \frac{4}{V}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2} z dz$$

$$= \frac{4}{V}\int_0^a dx\int_0^a \frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)dy$$

$$= \frac{2}{V}\int_0^a \left(ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{1}{5}a^5\right)dx = \frac{7}{15}a^2.$$

（3）$$I_z = \iiint_\Omega \rho(x^2+y^2)dv \xlongequal{\text{对称性}} 4\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$$

$$= 4\rho\int_0^a dx\int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)dy$$

$$= \frac{112}{45}\rho a^6.$$

12. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量（设密度 $\mu=1$）.

解　建立空间直角坐标系，使原点位于圆柱体的中心，z 轴平行于母线，则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2\leqslant a^2,\ -\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}}\left\{(\rho,\theta,z)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant a,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z&=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z\\&=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot h=\frac{1}{2}\pi ha^4.\end{aligned}$$

13. 设面密度为常量 μ 的质量均匀的半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0)\mid R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2,x\geqslant 0\}$，求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

解　如图 10－60，引力元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴和 z 轴的分量分别为

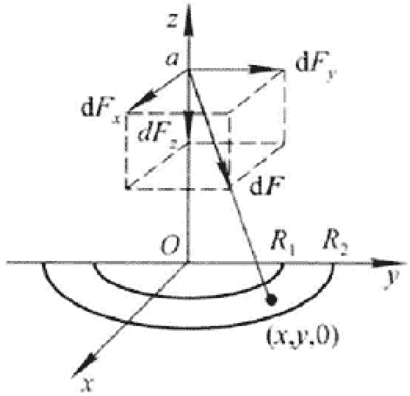


图 10－60

$$\mathrm{d}F_x=G\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

和

$$\mathrm{d}F_z=G\frac{\mu(-a)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma.$$

于是

$$\begin{aligned}F_x&=G\mu\iint\limits_{D}\frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma\\&\xlongequal{\text{极坐标}}G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\cos\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho\\&=2G\mu\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho(\text{令 }\rho=a\tan t\text{ 换元})\end{aligned}$$

$$= 2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}\frac{a^2\tan^2 t}{a^3\sec^3 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$= 2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t - \cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 2G\mu\Big[\ln(\sec t + \tan t) - \sin t\Big]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}$$

$$= 2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),$$

$$F_z = -Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} -Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right).$$

由于 D 关于 x 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_y = 0$．因此引力

$$\boldsymbol{F} = \left(2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right), 0,\right.$$

$$\left.\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right).$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant h\}$，求它对于位于点 $M_0(0,0,a)(a > h)$ 处的单位质量的质点的引力．

解　由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x = F_y = 0$．引力沿 z 轴的分量

$$F_z = \iiint_\Omega G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$

$$= G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}} G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi G\rho\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho\int_0^h\left[-1 - \frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= -2\pi G\rho[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

*习题 10－5 含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{dy}{1+x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dy$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)dy$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{dy}{1+x^2+y^2}=\int_0^{1+0}\frac{dy}{1+0+y^2}=[\arctan y]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_{-1}^{1}|y|dy=2\int_0^1 ydy=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)dy=\int_0^2 y^2(\cos 0)dy=\frac{8}{3}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)dy$； (2) $\varphi(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}dy$；

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\frac{y}{x}dy$； (4) $\varphi(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$.

解 (1) $\varphi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos xdy+(\cos^2x\sin x-\cos^3x)(\cos x)'$

$$-(\sin^2x\sin x-\sin^3x)(\sin x)'$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos^3x-\sin^3x)+(\cos x-\sin x)\sin x\cos^2x$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).$$

(2) $\varphi'(x)=\int_0^x\frac{1}{1+xy}dy+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$

$$=\frac{1}{x}[\ln(1+xy)]_0^x+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

(3) $\varphi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy+\arctan x^2\cdot 3x^2-\arctan x\cdot 2x$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{x^2}^{x^3}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x.$$

(4) $\varphi'(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}(-y^2)dy + e^{-x^5}\cdot 2x - e^{-x^3}\cdot 1$

$= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}dy.$

3. 设 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$，其中 $f(y)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$.

解 $F'(x) = \int_0^x f(y)dy + 2xf(x)$，

$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.

4. 应用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$；

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2\sin^2 x)dx$ $(a>0)$.

解 (1) 设

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}(|\alpha|\leqslant|a|<1),$$

则 $\varphi(0)=0, \varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x},$$

故
$$\varphi'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d(\tan x)}{\sec^2 x-\alpha^2}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\tan x)}{(1-\alpha^2)+\tan^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

于是
$$I = \varphi(a)-\varphi(0) = \int_0^a \varphi'(\alpha)d\alpha = \int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}d\alpha$$

$$= \pi\arcsin a.$$

(2) 设 $\varphi(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)dx$，则 $\varphi(1)=0, \varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)] = \frac{2\alpha\sin^2 x}{\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x},$$

故

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha\sin^2 x}{\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{u=\tan x} 2\alpha\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+\alpha^2u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\alpha^2u^2}\right](\alpha\neq 1) \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1};
\end{aligned}$$

又当 $\alpha=1$ 时,

$$\varphi'(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a>0$,$\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1,a]$(或 $[a,1]$)上连续. 于是

$$I=\varphi(a)-\varphi(1)=\int_1^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_1^a\frac{\pi}{\alpha+1}\mathrm{d}\alpha=\pi\ln\frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(2) $\displaystyle\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x(0<a<b)$.

解　(1) 因为 $\displaystyle\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$, 故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(\text{交换积分次序}) \\
&= \int_0^1\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} &\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\sin^2 t} \\
&\xlongequal{u=\tan t}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(1+y^2)u^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\arctan(\sqrt{1+y^2}u)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.
\end{aligned}$$

因此

$$原式=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}dy=\frac{\pi}{2}[\ln(y+\sqrt{1+y^2})]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

（2）因为 $\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$，故

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy\quad（交换积分次序）$$

$$=\int_a^b dy\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx.$$

由于

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx\xlongequal{x=e^{-t}}\int_{+\infty}^0\sin t\cdot e^{-yt}(-e^{-t})dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot e^{-(y+1)t}dt\quad（分部积分）$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2}e^{-(y+1)t}[\cos t-(y+1)\sin t]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

因此

$$原式=\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}dy=[\arctan(y+1)]_a^b$$

$$=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

总习题十

1．填空：

（1）积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值是________；

（2）设闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$________．

解 （1）交换积分次序并计算所得的二次积分，得

$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^{-y^2}d(-y^2)=-\frac{1}{2}[e^{-y^2}]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

(2) 用极坐标计算. $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2a^2}+\frac{1-\cos 2\theta}{2b^2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\cdot 2\pi=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

2. 以下各题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$, $\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$,则有(　　);

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$

(2) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$, $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$. 则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=($　　$)$;

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)=($　　$)$.

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$　　(D) 0

解　(1) 先说明(A)不正确. 由于 Ω_1 关于 yOz 面对称,而被积函数 x 关于 x 是奇函数,故 $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=0$,而 $\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v\neq 0$,故(A)不正确. 类似可说明(B)和(D)不正确. 再说明(C)是正确的. 设 $\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0,x\geqslant 0\}$. 由于被积函数 z 关于 x 是偶函数,而 Ω_3 与 $\Omega_1\setminus\Omega_3$[①] 关于 yOz 面对称,故 $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_3}z\mathrm{d}v$. 又由于被积

① $\Omega_1\setminus\Omega_3=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega_1$ 且 $(x,y,z)\notin\Omega_3\}$,称为 Ω_1 与 Ω_3 的差集.

函数 z 关于 y 也是偶函数，且 Ω_2 与 $\Omega_3 \backslash \Omega_2$ 关于 zOx 面对称，故 $\iiint\limits_{\Omega_3} z\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$[1]. 因此应选(C).

(2) 记 D 的三个顶点为 $A(a,a)$, $B(-a,a)$, $C(-a,-a)$(图 10-61). 连接 O,B，则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle AOB$ 之并. 由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称，$\triangle AOB$ 关于 y 轴对称，而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数，从而有

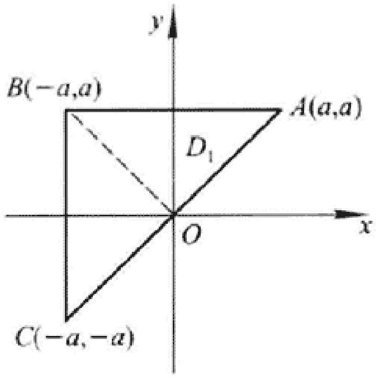


图 10-61

$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\triangle AOB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle COB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + 0 = 0;$$

又由于函数 $\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数，关于 x 是偶函数，从而有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\triangle COB} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle AOB} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 0 + 2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因此应选(A).

(3) 解法一　由于考虑 $F'(2)$，故可设 $t>1$. 对所给二重积分交换积分次序，得

$$F(t) = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x\int_1^x \mathrm{d}y = \int_1^t (x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

于是，

$$F'(t) = (t-1)f(t),$$

从而有 $F'(2) = f(2)$. 故选(B).

解法二　设 $f(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$，则有

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x = \int_1^t [G(t) - G(y)]\mathrm{d}y \\ &= G(t)\int_1^t \mathrm{d}y - \int_1^t G(y)\mathrm{d}y = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

---

[1] 关于三重积分中如何利用对称性的问题，请读者参照本书习题 10-1 第 2 题解的注(1)(2)得出有关结论.

求导得

$$F'(t)=G(t)+(t-1)f(t)-G(t)=(t-1)f(t).$$

因此

$$F'(2)=f(2).$$

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \sin x,0\leqslant x\leqslant \pi\}$；

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

解　(1) D 可表示为 $0\leqslant y\leqslant 1+x,0\leqslant x\leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x}(1+x)\sin y\mathrm{d}y\\&=\int_0^1[(1+x)-(1+x)\cos(1+x)]\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=1+x}\int_1^2(t-t\cos t)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}-t\sin t-\cos t\right]_1^2\\&=\frac{3}{2}+\sin 1+\cos 1-2\sin 2-\cos 2.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma&=\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi}x^2\sin x\mathrm{d}x=-[x^2\cos x]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x\\&=\pi^2+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right)=\pi^2-4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y^2\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^3x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\mathrm{d}x\text{①}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\end{aligned}$$

① 一般有：$\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$，参阅本书上册习题5-3第7(13)题的解答.

故
$$\iint_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma-\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma=(\pi^2-4)-\frac{4}{9}$$
$$=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

(3) 利用极坐标计算. 在极坐标系中,
$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant R\cos\theta,\,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$
于是
$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma&=\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}(1-|\sin^3\theta|)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

注　如果忽略 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上非正,而按 $(R^2-R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=R^3\sin^3\theta$ 计算,将导致错误. 这是一类常见错误,要注意避免.

(4) 利用对称性可知 $\iint_D 3x\,\mathrm{d}\sigma=0,\iint_D 6y\,\mathrm{d}\sigma=0$. 又
$$\iint_D 9\,\mathrm{d}\sigma=9\times(D\text{ 的面积})=9\pi R^2,$$
$$\begin{aligned}\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma&\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^3\,\mathrm{d}\rho\\&=\pi\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{\pi}{4}R^4,\end{aligned}$$
因此
$$\text{原式}=\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2.$$

4. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)\,dx + \int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)\,dx$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$,其中 $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, -\sqrt{4-y} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(y-4), 0 \leqslant y \leqslant 4\right\}$(图 10-62),将 D 表达为 $2x+4 \leqslant y \leqslant 4-x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$,则得

$$\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)\,dx = \int_{-2}^0 dx\int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y)\,dy.$$

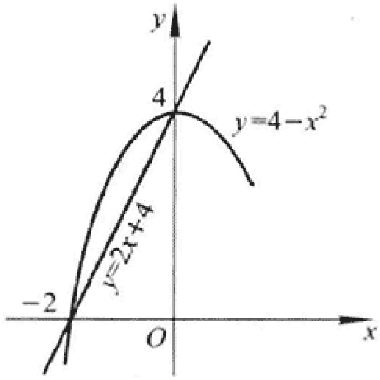


图 10-62

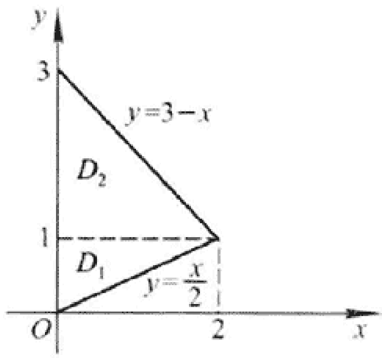


图 10-63

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$,其中 $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2y, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3-y, 1 \leqslant y \leqslant 3\}$(图 10-63).
D 可表达为$\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 3-x, 0 \leqslant x \leqslant 2\right\}$,于是

$$\text{原式} = \int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,dy.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$,其中 $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$(图 10-64). 将 D 表达为 $D_1 \cup D_2$,其中 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y^2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2y-y^2}, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$,于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

5. 证明:

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\,dx = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)\,dx.$$

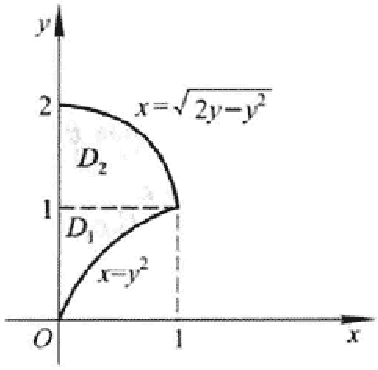


图 10 - 64

证 上式左端的二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D e^{m(a-x)}f(x)\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant a\}=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant a\}$. 于是交换积分次序即得

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)\,dx=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)\,dy$$
$$=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)\,dx.$$

6. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 表为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

解 积分区域 D 如图 10 - 65 所示. 抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $\rho=\sec\theta\tan\theta$，直线 $y=1$ 的极坐标方程为 $\rho=\csc\theta$，用射线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 将 D 分成 D_1,D_2,D_3 三部分：

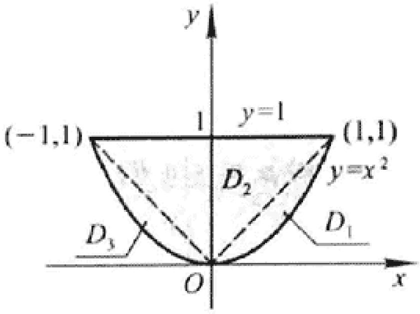


图 10 - 65

$$D_1:0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4};$$

$$D_2:0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4};$$

$$D_3:0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta,\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

因此
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta\tan\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\sec\theta\tan\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho.$$

7. 设$f(x,y)$在闭区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$上连续,且
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$
求$f(x,y)$.

解　设$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=A$,则
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A,$$
从而
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D dxdy,$$
又
$$\iint\limits_D dxdy = D\text{的面积}=\frac{\pi}{8},$$
故得
$$A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-A,$$
因此
$$A=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$
在极坐标系中,
$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$
因此
$$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9},$$
于是得
$$A=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}.$$
从而
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}.$$

8. 把积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$化为三次积分,其中积分区域$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$、

$y=x^2$ 及平面 $y=1,z=0$ 所围成的闭区域.

解 Ω 为一曲顶柱体,其顶为 $z=x^2+y^2$,底位于 xOy 面上,其侧面由抛物柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=1$ 所组成. 由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此
$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

9. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是两个球:$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$ 的公共部分;

(2) $\iiint_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 (1) 解法一 利用直角坐标,采用"先重后单"的积分次序.

由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\x^2+y^2+z^2=2Rz\end{cases}$ 解得 $z=\dfrac{R}{2}$,于是用平面 $z=\dfrac{R}{2}$ 把 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2 两部分,其中

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2,0\leqslant z\leqslant\frac{R}{2}\right\};$$

$$\Omega_2=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant R^2-z^2,\frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R\right\}(\text{图 }10-66).$$

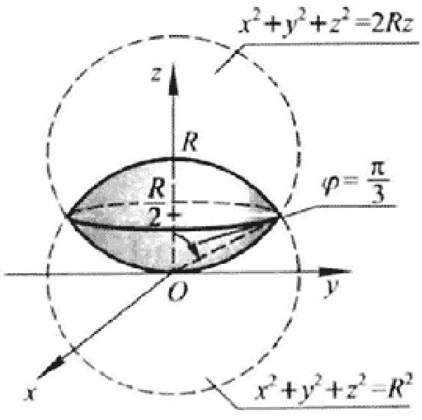


图 10-66

于是

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega_1} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2 \leqslant 2Rz-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi(2Rz - z^2) \cdot z^2 \mathrm{d}z + \int_{\frac{R}{2}}^{R} \pi(R^2 - z^2) \cdot z^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{40}\pi R^5 + \frac{47}{480}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5.$$

*解法二　利用球面坐标计算. 作圆锥面 $\varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$,将 Ω 分成 Ω_1' 和 Ω_2' 两部分:

$$\Omega_1' = \left\{(r,\varphi,\theta)\ \middle|\ 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\};$$

$$\Omega_2' = \left\{(r,\varphi,\theta)\ \middle|\ 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi, \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}.$$

于是

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega_1'} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2'} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^4 \mathrm{d}r +$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{7}{60}\pi R^5 + \frac{1}{160}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5.$$

(2) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称,而被积函数关于 z 是奇函数,故所求积分等于零.

(3) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x = 5$ 所围成,Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y,z) \mid y^2 + z^2 \leqslant 10\}.$$

因此 Ω 可表示为

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2) \leqslant x \leqslant 5,\quad 0 \leqslant y^2 + z^2 \leqslant 10.$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v = \iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x$$

$$= \iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\left(5-\frac{y^2+z^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint_{D_{yz}}\rho^2\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{250}{3}\pi.$$

注 根据本题的积分区域 Ω 的特点，应将 Ω 向 yOz 面投影，即采用先对 x、后对 y 和 z 的积分次序较宜.

*10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

解 (1) 利用球面坐标，

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

利用极坐标，

$$\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r.$$

于是

$$F(t)=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r},$$

求导得

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2},$$

所以在区间$(0,+\infty)$内,$F'(t)>0$,故 $F(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2) 证　因为$f(x^2)$为偶函数,故

$$\int_{-t}^t f(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r.$$

所以

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}.$$

要证明 $t>0$ 时,$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$,即证

$$\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}>\frac{2\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r},$$

只需证当 $t>0$ 时,$H(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$. 由于 $H(0)=0$,且

$$H'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0,$$

所以 $H(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加,又 $H(t)$在$[0,+\infty)$上连续,故当 $t>0$ 时,

$$H(t)>H(0)=0.$$

因此当 $t>0$ 时,有

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

11. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解　平面方程为 $z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$,它被三坐标面割出的有限部分在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}为由 x 轴、y 轴和直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{|ab|}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{|ab|}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{2}|ab|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

12. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少？

解　设矩形另一边的长度为 l 并建立如图 10－67 所示的坐标系，则质心的纵标

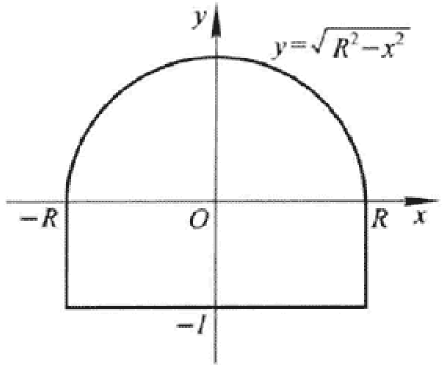


图 10－67

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{A} = \frac{\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\mathrm{d}y}{A}$$

$$= \frac{\int_{-R}^{R}(R^2-x^2-l^2)\mathrm{d}x}{2A} = \frac{\frac{2}{3}R^3-l^2R}{A},$$

由题设 $\bar{y}=0$ 即可算得

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

13. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片（面密度为常数 μ）对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解　闭区域 $D=\{(x,y)\mid -\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 1\}$，所求的转动惯量为

$$I = \iint\limits_D \mu(y+1)^2\mathrm{d}\sigma = \mu\int_0^1(y+1)^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\mu\int_0^1\sqrt{y}(y+1)^2\mathrm{d}y$$

$$= 2\mu\int_0^1(y^{\frac{5}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}y$$

$$= \frac{368}{105}\mu.$$

14. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的质量均匀的半圆形薄片，占有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2, y\geqslant 0\}$，过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P，$OP=a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解　求解本题时，所有的分析和计算过程均与习题 10－4 的第 13 题雷同，故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_x=0$. 又薄片的面密度 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$，于是

$$F_y = Gm\mu\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} Gm\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2Gm\mu\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{\sqrt{R^2+a^2}+R}{a}-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),$$

$$F_z = -Gam\mu\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -Gam\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{2GamM}{R^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$$

$$= -\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),$$

所求引力为 $\boldsymbol{F}=(0,F_y,F_z)$.

15. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}$ 的质心.

解　设质心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性知质心位于 z 轴上，即 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 由于

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}v = \int_0^b z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\text{其中 } D_z=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2\leqslant a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\right\}\right)$$

$$= \int_0^b \pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)z\mathrm{d}z$$

$$= \pi a^2 \int_0^b \left(z - \frac{z^3}{b^2}\right) dz = \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8},$$

即质心为$\left(0,0,\frac{3b}{8}\right)$.

*16. 一球形行星的半径为 R,其质量为 M,其密度呈球对称分布,并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零,则行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为 μ_0,则由题设,在距球心 $r(0 \leqslant r \leqslant R)$处的密度为 $\mu(r) = \mu_0 - kr$. 由于 $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$,故 $k = \frac{\mu_0}{R}$,即

$$\mu(r) = \mu_0\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} M &= \iiint\limits_{r \leqslant R} \mu_0\left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi d\theta \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr \\ &= 4\pi\mu_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr = \frac{\mu_0 \pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

因此得
$$\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}.$$

第十一章

曲线积分与曲面积分

习题 11-1　对弧长的曲线积分

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L,在点 (x,y) 处它的线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y;

(2) 这曲线弧的质心坐标 $\bar{x}, \bar{y}$.

解　(1) 设想将 L 分成 n 个小弧段,取出其中任意一段记作 ds(其长度也记作 ds),(x,y) 为 ds 上一点,则 ds 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量近似等于

$$dI_x = y^2\mu(x,y)ds,\quad dI_y = x^2\mu(x,y)ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分,即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量:

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)ds,\quad I_y = \int_L x^2\mu(x,y)ds.$$

(2) ds 对 x 轴和对 y 轴的静矩近似等于

$$dM_x = y\mu(x,y)ds,\quad dM_y = x\mu(x,y)ds.$$

以此作为静矩元素并积分,即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩:

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)ds,\quad M_y = \int_L x\mu(x,y)ds.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证　设对积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段,第 i 个小弧段的长度为 Δs_i,(ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点. 按假设,有

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i (i = 1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\int_L f(x,y)ds \leqslant \int_L g(x,y)ds.$$

又 $f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$, $-f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$,利用以上结果,得

$$\int_L f(x,y)\,ds \leqslant \int_L |f(x,y)|\,ds,$$

$$-\int_L f(x,y)\,ds \leqslant \int_L |f(x,y)|\,ds,$$

即

$$\left|\int_L f(x,y)\,ds\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\,ds.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)ds$，其中 L 为连接(1,0)及(0,1)两点的直线段；

(3) $\oint_L x ds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界；

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧；

(6) $\int_\Gamma x^2 yz ds$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A,B,C,D 依次为点(0,0,0)，(0,0,2)，(1,0,2)，(1,3,2)；

(7) $\int_L y^2 ds$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(8) $\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解　(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}dt=2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 直线 L 的方程为 $y=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\int_L (x+y)ds=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成,其中 $L_1: y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$, $L_2: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{d}s &= \int_{L_1} x\mathrm{d}s+\int_{L_2} x\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 \sqrt{2}x\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(4) L 由线段 $OA: y=0(0\leqslant x\leqslant a)$, 圆弧 $\widehat{AB}: x=a\cos t, y=a\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 和线段 $OB: y=x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 组成(图 11-1).

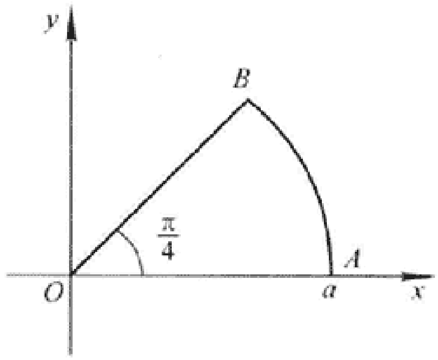


图 11-1

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a e^x\mathrm{d}x=e^a-1,$$

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}ae^a,\end{aligned}$$

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x=e^a-1,$$

于是 $$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1=e^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2.$$

(5) $$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t\\ &=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t)^2}\mathrm{d}t\\ &=\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\cdot\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

（6）Γ 由直线段 AB、BC 和 CD 组成，其中

$$AB: x=0, y=0, z=t(0\leqslant t\leqslant 2);\quad BC: x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 1);$$
$$CD: x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3).$$

于是
$$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s=\int_{AB}x^2yz\mathrm{d}s+\int_{BC}x^2yz\mathrm{d}s+\int_{CD}x^2yz\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^2 0\mathrm{d}t+\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_0^3 2t\mathrm{d}t=9.$$

（7）$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t,$$
$$\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{u=\frac{t}{2}}16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u$$
$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u^{①}=32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3.$$

（8）$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\mathrm{d}t=at\mathrm{d}t,$$
$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]\cdot at\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)t\mathrm{d}t=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a、中心角为 2φ 的均匀圆弧（线密度 $\mu=1$）的质心.

解　取坐标系如图 11－2 所示，则由对称性知
$$\bar{y}=0.$$
又 $M=\int_L\mu\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{d}s=2\varphi a$（也可由圆弧的弧长公式直接得出），

故
$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{M}=\frac{\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos t\cdot a\mathrm{d}t}{2\varphi a}$$
$$=\frac{2a^2\sin\varphi}{2\varphi a}=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

① 参阅教材上册第五章第三节例 12.

所求圆弧的质心的位置为$\left(\dfrac{a\sin\varphi}{\varphi},0\right)$.

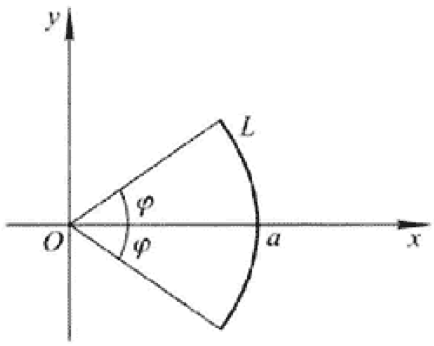


图 11－2

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$,其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求:

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z;

(2) 它的质心.

解 (1) $I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) 设质心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

$$M=\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t,$$

由于 $\displaystyle\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t=\left[(a^2+k^2t^2)\sin t\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot 2k^2t\mathrm{d}t$

$$= [2k^2 t\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2k^2 \cos t\mathrm{d}t = 4\pi k^2,$$

因此
$$\bar{x} = \frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)} = \frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

类似的，

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot(-4\pi^2k^2)}{M} = \frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi} t(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{k\sqrt{a^2+k^2}(2a^2\pi^2+4k^2\pi^4)}{M} = \frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

习题 11－2　对坐标的曲线积分

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0.$$

证　将 L 的方程表达为如下的参数形式：

$$\begin{cases} x=a, \\ y=t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } \alpha \text{ 变到 } \beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式，得

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot 0\mathrm{d}t = 0.$$

注　本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质：

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段，则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0$；如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段，则 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$. 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线，证明：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x.$$

证　将 L 的方程表达为如下的参数形式：

$$\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad x \text{ 从 } a \text{ 变到 } b,$$

于是
$$\int_L P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,0)\,dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\int_L (x^2-y^2)\,dx$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧；

(2) $\oint_L xy\,dx$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行)；

(3) $\int_L y\,dx+x\,dy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t,\ y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧；

(4) $\oint_L \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行)；

(5) $\int_\Gamma x^2\,dx+z\,dy-y\,dz$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta,y=a\cos\theta,z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；

(6) $\int_\Gamma x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

(7) $\oint_\Gamma dx-dy+y\,dz$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A,B,C 依次为点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$；

(8) $\int_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1)
$$\int_L (x^2-y^2)\,dx = \int_0^2 (x^2-x^4)\,dx = -\frac{56}{15}.$$

(2) 如图 11-3，L 由 L_1 和 L_2 所组成，其中 L_1 为有向半圆弧：

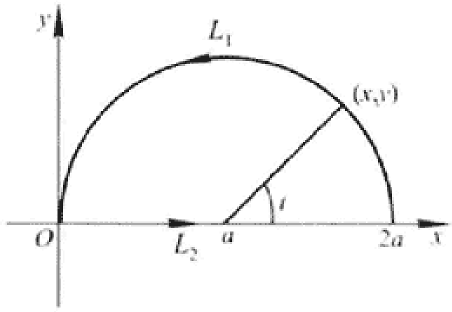


图 11-3

$$\begin{cases} x=a+a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } \pi;$$

L_2 为有向线段 $y=0$,x 从 0 变到 $2a$. 于是

$$\oint_L xy\mathrm{d}x = \int_{L_1} xy\mathrm{d}x + \int_{L_2} xy\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} a(1+\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t + 0$$

$$= -a^3\left(\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t\right)$$

$$= -a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3) $$\int_L y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t\cdot(-R\sin t) + R\cos t\cdot R\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t = 0.$$

(4) L 的参数方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t$,t 从 0 变到 2π. 于是

$$原式 = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t) - a(\cos t - \sin t)\cdot a\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(-a^2)\mathrm{d}t = -2\pi.$$

(5) $$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\pi}[k^2\theta^2\cdot k + a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - a\cos\theta\cdot(a\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(k^3\theta^2 - a^2)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}k^3\pi^3 - a^2\pi.$$

(6) 直线 Γ 的参数方程为:$x=1+t, y=1+2t, z=1+3t$,t 从 0 变到 1. 于是

$$原式 = \int_0^1[(1+t)\cdot 1 + (1+2t)\cdot 2 + (1+t+1+2t-1)\cdot 3]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t = 13.$$

(7) Γ 由有向线段 AB, BC, CA 依次连接而成,其中

AB:$x=1-t, y=t, z=0$,t 从 0 变到 1;

BC:$x=0, y=1-t, z=t$,t 从 0 变到 1;

CA:$x=t, y=0, z=1-t$,t 从 0 变到 1.

$$\int_{AB}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \int_0^1[(-1)-1+0]\mathrm{d}t = -2,$$

$$\int_{BC}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \int_0^1[0-(-1)+(1-t)\cdot 1]\mathrm{d}t = \int_0^1(2-t)\mathrm{d}t = \frac{3}{2},$$

$$\int_{CA} dx - dy + ydz = \int_0^1 (1 - 0 + 0)dt = 1,$$

因此
$$\oint_{\Gamma} dx - dy + ydz = -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

(8)
$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$
$$= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x\cdot x^2) + (x^4 - 2x\cdot x^2)\cdot 2x]dx$$
$$= \int_{-1}^1 (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2)dx$$
$$= 2\int_0^1 (-4x^4 + x^2)dx = -\frac{14}{15}.$$

4. 计算 $\int_L (x+y)\,dx + (y-x)dy$,其中 L 是:

(1) 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;

(2) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段;

(3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$,然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;

(4) 曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解 (1) 化为对 y 的定积分. $L: x = y^2$, y 从 1 变到 2,

$$原式 = \int_1^2 [(y^2 + y)\cdot 2y + (y - y^2)\cdot 1]dy$$
$$= \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y)dy = \frac{34}{3}.$$

(2) L 的方程为 $y - 1 = \frac{2-1}{4-1}(x-1)$,即 $x = 3y - 2$, y 从 1 变到 2. 化为对 y 的定积分计算,有

$$原式 = \int_1^2 [(3y - 2 + y)\cdot 3 + (y - 3y + 2)\cdot 1]dy$$
$$= \int_1^2 (10y - 4)dy = 11.$$

(3) 记 L_1 为从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$ 的有向线段, L_2 为从点 $(1,2)$ 到点 $(4,2)$ 的有向线段. 则 $L_1: x = 1$, y 从 1 变到 2; $L_2: y = 2$, x 从 1 变到 4. 在 L_1 上, $dx = 0$; 在 L_2 上, $dy = 0$. 于是

$$\int_{L_1} (x+y)dx + (y-x)dy = \int_1^2 (y-1)dy = \frac{1}{2},$$
$$\int_{L_2} (x+y)dx + (y-x)dy = \int_1^4 (x+2)dx = \frac{27}{2}.$$

因此

$$原式 = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14.$$

（4）由$\begin{cases}2t^2+t+1=1,\\ t^2+1=1\end{cases}$可得 $t=0$；由$\begin{cases}2t^2+t+1=4,\\ t^2+1=2\end{cases}$可得 $t=1$. 因此

$$\text{原式}=\int_0^1[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4t+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot 2t]\,dt$$

$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\,dt=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解　依题意,$\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|,0)$,$L:x=R\cos t,y=R\sin t$,$t$ 从 0 变到$\frac{\pi}{2}$,因此

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_L|\boldsymbol{F}|dx+0dy$$

$$=|\boldsymbol{F}|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-R\sin t)\,dt=-|\boldsymbol{F}|R.$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致,求质量为 m 的质点从位置(x_1,y_1,z_1)沿直线移到(x_2,y_2,z_2)时重力所作的功.

解　重力 $\boldsymbol{F}=(0,0,mg)$,质点移动的直线路径 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t,\\ z=z_1+(z_2-z_1)t,\end{cases}\quad t\text{ 从 0 变到 1.}$$

于是

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_L 0dx+0dy+mgdz$$

$$=\int_0^1 mg(z_2-z_1)\,dt=mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 化成对弧长的曲线积分,其中 L 为:

（1）在 xOy 面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

（2）沿抛物线 $y=x^2$ 从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

（3）沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点$(0,0)$到点$(1,1)$.

解　（1）L 为从点$(0,0)$到$(1,1)$的有向线段,其上任一点处的切向量的方向余弦满足 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,于是

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\,ds$$

$$=\int_L\frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}\,ds.$$

（2）L 由如下的参数方程给出:$x=x,y=x^2$,x 由小到大地从 0 变到 1,故 L 的切

向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,y'(x))=(1,2x)$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\quad \cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

于是
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L\frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s.$$

(3) L 由如下的参数方程给出：$x=x,y=\sqrt{2x-x^2}$，x 由小到大地从 0 变到 1，故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2},$$

$$\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2}=1-x,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分.

解　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t=2x,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2=3y$，注意到参数 t 由小变到大，因此 Γ 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}.$$

从而
$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

习题 11-3　　格林公式及其应用

1. 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性：

(1) $\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线；

(2) $\oint_L (x^2-xy^3)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$,其中 L 是四个顶点分别为(0,0),(2,0),(2,2)和(0,2)的正方形区域的正向边界.

解　(1) 先按曲线积分的计算公式直接计算. 记 $L_1: y=x^2$, x 从 0 变到 1; $L_2: x=y^2$, y 从 1 变到 0(图 11-4). 于是

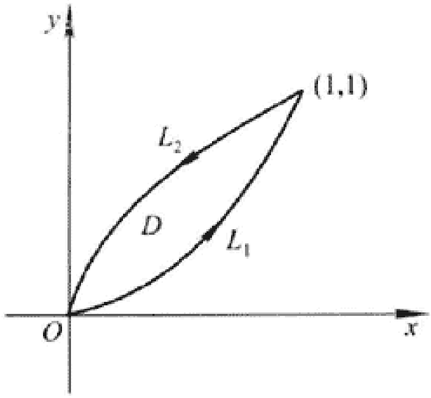


图 11-4

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{L_1}(2xy-x^2)\,dx+(x+y^2)\,dy+\int_{L_2}(2xy-x^2)\,dx+(x+y^2)\,dy \\
&= \int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)\cdot 2x]\,dx+\int_1^0[(2y^3-y^4)\cdot 2y+(y^2+y^2)]\,dy \\
&= \int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)\,dx+\int_1^0(-2y^5+4y^4+2y^2)\,dy \\
&= \frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

又, $P=2xy-x^2$, $Q=x+y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$,

$$
\begin{aligned}
\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= \iint_D(1-2x)\,dxdy \\
&= \int_0^1(1-2x)\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^1(1-2x)(\sqrt{x}-x^2)\,dx \\
&= \int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-x^2+2x^3)\,dx=\frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

可见
$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

(2) 如图 11-5. L 由有向线段 OA, AB, BC 和 CO 组成.

$$\int_{OA}(x^2-xy^3)\,dx+(y^2-2xy)\,dy=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3},$$

$$\int_{AB}(x^2-xy^3)\,dx+(y^2-2xy)\,dy=\int_0^2(y^2-4y)\,dy=\frac{8}{3}-8,$$

$$\int_{BC}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0(x^2-8x)\mathrm{d}x=16-\frac{8}{3},$$

$$\int_{CO}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0 y^2\mathrm{d}y=-\frac{8}{3},$$

于是

$$\text{原式}=\frac{8}{3}+\left(\frac{8}{3}-8\right)+\left(16-\frac{8}{3}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)=8.$$

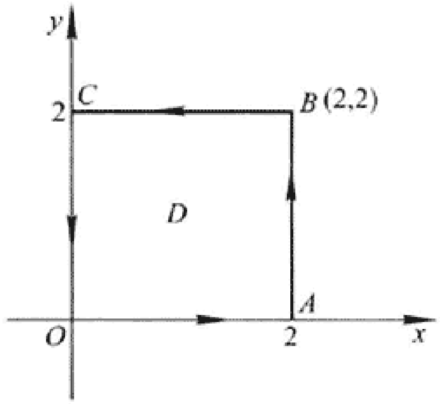


图 11-5

又
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,\frac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2,$$

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(-2y+3xy^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^2(8x-4)\mathrm{d}x=8,\end{aligned}$$

可见
$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$;

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 (1) 正向星形线的参数方程中的参数 t 从 0 变到 2π,因此

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3t(3a\sin^2t\cos t)-a\sin^3t(3a\cos^2t)(-\sin t)]\mathrm{d}t\\&=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4t\sin^2t+\sin^4t\cos^2t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{8}(1 - \cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

（2）正向椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 的参数方程为

$$x = 4\cos t, y = 3\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [4\cos t \cdot 3\cos t - 3\sin t(-4\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 12\pi.$$

（3）正向圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$，即 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 的参数方程为

$$x = a + a\cos t, y = a\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a + a\cos t)a\cos t - a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos t)\mathrm{d}t = \pi a^2.$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$，L 的方向为逆时针方向.

解　在 L 所围的区域内的点 $(0,0)$ 处，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 均无意义. 现取 r 为适当小的正数，使圆周 l（取逆时针向）：$x = r\cos t, y = r\sin t$（t 从 0 变到 2π）位于 L 所围的区域内，则在由 L 和 l^- 所围成的复连通区域 D 上（图 11－6），可应用格林公式，在 D 上，

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

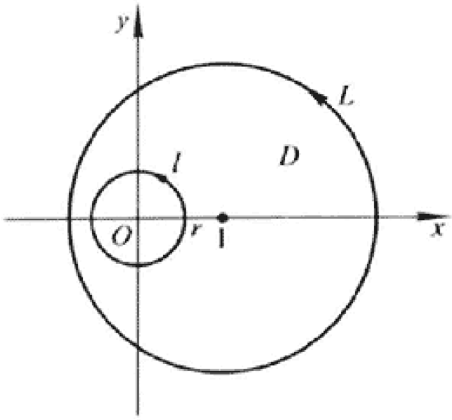


图 11－6

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} + \oint_{l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

从而

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} &= \oint_l \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{2r^2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = -\pi.\end{aligned}$$

4. 确定闭曲线 C,使曲线积分

$$\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$$

达到最大值.

解　记 D 为 C 所围成的平面有界闭区域,C 为 D 的正向边界曲线,则由格林公式

$$\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y = \iint_D [(1-2x^2) - y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要使上式右端的二重积分达到最大值,D 应包含所有使被积函数 $1-2x^2-y^2$ 大于零的点,而不包含使被积函数小于零的点.因此 D 应为由椭圆 $2x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域.这就是说,当 C 为取逆时针方向的椭圆 $2x^2+y^2=1$ 时,所给的曲线积分达到最大值.

5. 设 n 边形的 n 个顶点按逆时针向依次为 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_n(x_n,y_n)$.试利用曲线积分证明此 n 边形的面积为

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)].$$

证　n 边形的正向边界 L 由有向线段 $M_1M_2,M_2M_3,\cdots,M_{n-1}M_n,M_nM_1$ 组成.

有向线段 M_1M_2 的参数方程为 $x = x_1 + (x_2 - x_1)t, y = y_1 + (y_2 - y_1)t$,$t$ 从 0 变到 1,于是

$$\begin{aligned}\int_{M_1M_2} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \{[x_1 + (x_2 - x_1)t](y_2 - y_1) - [y_1 + (y_2 - y_1)t](x_2 - x_1)\}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (x_1y_2 - x_2y_1)\mathrm{d}t = x_1y_2 - x_2y_1.\end{aligned}$$

同理可求得

$$\int_{M_2M_3} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x_2y_3 - x_3y_2,\cdots,$$

$$\int_{M_{n-1}M_n} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1},$$

$$\int_{M_nM_1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x_n y_1 - x_1 y_n.$$

因此 n 边形的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{M_1M_2} + \int_{M_2M_3} + \cdots + \int_{M_{n-1}M_n} + \int_{M_nM_1}\right)x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)\right].$$

6. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关,并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + (6x^2y - 3xy^2)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$.

解　(1) 函数 $P = x + y, Q = x - y$ 在整个 xOy 面这个单连通区域内,具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,1),R 为(2,1),N 为(2,3),则有

$$\text{原式} = \int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x + \int_1^3 (2-y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}.$$

(2) 函数 $P = 6xy^2 - y^3, Q = 6x^2y - 3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,2),R 为(3,2),N 为(3,4),则有

$$\text{原式} = \int_1^3 (24x - 8)\mathrm{d}x + \int_2^4 (54y - 9y^2)\mathrm{d}y$$

$$= 80 + 156 = 236.$$

(3) 函数 $P = 2xy - y^4 + 3, Q = x^2 - 4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,0),R 为

$(2,0)$，N 为 $(2,1)$，则

$$原式 = \int_1^2 3\mathrm{d}x + \int_0^1 (4-8y^3)\mathrm{d}y = 3+2 = 5.$$

7. 利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x + (5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$、$(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；

(2) $\oint_L (x^2y\cos x + 2xy\sin x - y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x^2\sin x - 2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$，其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的一段弧；

(4) $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域，则由格林公式，

$$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x + (5y+3x-6)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D [3-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\times(D\text{ 的面积}) = 4\times 3 = 12.$$

(2) 由于
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\sin x + x^2\cos x - 2y\mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2\cos x + 2x\sin x - 2y\mathrm{e}^x,$$

故由格林公式得

$$原式 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(3) 由于 $P = 2xy^3 - y^2\cos x$，$Q = 1-2y\sin x+3x^2y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN，其中 O 为 $(0,0)$，R 为 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$N$ 为 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$（图 11-7），得

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(1 - 2y\sin\frac{\pi}{2} + 3\cdot\frac{\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)dy=\frac{\pi^2}{4}.$$

（4）由于 $P=x^2-y,Q=-(x+\sin^2y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$，故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN，其中 O 为 $(0,0)$，R 为 $(1,0)$，N 为 $(1,1)$（图 11－8），得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2y)dy\\&=\frac{1}{3}-1-\int_0^1\frac{1-\cos 2y}{2}dy\\&=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2.\end{aligned}$$

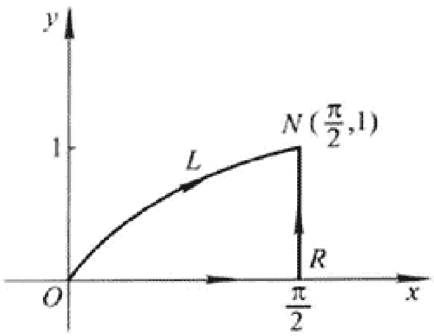


图 11－7

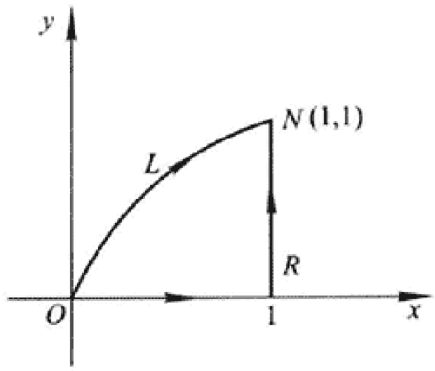


图 11－8

8. 验证下列 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$：

（1）$(x+2y)dx+(2x+y)dy$；

（2）$2xydx+x^2dy$；

（3）$4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy$；

（4）$(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$；

（5）$(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$.

解　（1）在整个 xOy 面内，函数 $P=x+2y,Q=2x+y$ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$，因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x xdx+\int_0^y(2x+y)dy\\&=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}.\end{aligned}$$

（2）在整个 xOy 面内，函数 $P=2xy$ 和 $Q=x^2$ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=$

$\frac{\partial P}{\partial y}$,故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\mathrm{d}y=x^2y.$$

(3) 在整个 xOy 面内,$P=4\sin x\sin 3y\cos x$ 和 $Q=-3\cos 3y\cos 2x$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(-3\cos 3y\cos 2x)\mathrm{d}y\\&=[-\sin 3y\cos 2x]_0^y\\&=-\cos 2x\sin 3y.\end{aligned}$$

(4) 在整个 xOy 面内,函数 $P=3x^2y+8xy^2$ 和 $Q=x^3+8x^2y+12ye^y$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y\\&=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y).\end{aligned}$$

(5) 解法一　在整个 xOy 面内,$P=2x\cos y+y^2\cos x$ 和 $Q=2y\sin x-x^2\sin y$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\&=y^2\sin x+x^2\cos y.\end{aligned}$$

注　在已经证明了所给表达式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分后,为了求 $u(x,y)$,除了采用上面题解中的曲线积分方法外,还可用以下两种方法:

解法二(偏积分法)　因函数 $u(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x,$$

故

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x\\&=x^2\cos y+y^2\sin x+\varphi(y),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数，由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin y+2y\sin x+\varphi'(y).$$

又 $u(x,y)$ 必需满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y,$$

从而得 $\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$（$C$ 为任意常数）. 因此

$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x+C,$$

取 $C=0$，就得到满足要求的一个 $u(x,y)$.

解法三（凑微分法）　利用微分运算法则直接凑出 $u(x,y)$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2x\cos y\mathrm{d}x-x^2\sin y\mathrm{d}y)+(y^2\cos x\mathrm{d}x+2y\sin x\mathrm{d}y)\\&=[\cos y\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}(\cos y)]+[y^2\mathrm{d}(\sin x)+\sin x\mathrm{d}y^2]\\&=\mathrm{d}(x^2\cdot\cos y)+\mathrm{d}(y^2\cdot\sin x)\\&=\mathrm{d}(x^2\cos y+y^2\sin x).\end{aligned}$$

因此可取 $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x$.

9. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x^2+y^2,Y=2xy-8$，这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关.

证　场力所作的功

$$W=\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2xy-8)\mathrm{d}y,$$

由于 $P=x^2+y^2$ 和 $Q=2xy-8$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y=\frac{\partial P}{\partial y}$，故曲线积分在 xOy 面内与路径无关，即场力所作的功与路径无关.

***10.** 判别下列方程中哪些是全微分方程？对于全微分方程，求出它的通解.

(1) $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=0$（$a$ 为常数）;

(3) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(5) $(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

(6) $y(x-2y)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$;

(7) $(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho+2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=0$;

(8) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$.

说明　① 在单连通区域内，若 $P(x,y),Q(x,y)$ 有连续的偏导数，则 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程的充要条件. 本题利用这一条件来判别方程是否为全微分方程.

② 在条件 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 下，存在函数 $u=u(x,y)$，满足 $\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，而 $u(x,y)=C$ 即是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的通解. 函数 $u(x,y)$ 可用三种方法求得，其一为曲线积分法，其二为凑微分法，其三为偏积分法.

解 (1)
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+6xy^2)=12xy,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y+4y^2)=12xy,$$

因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y\\&=x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3,\end{aligned}$$

故所求通解为
$$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

(2)
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(a^2-2xy-y^2)=-2x-2y,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[-(x+y)^2]=-2(x+y),$$

因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x a^2\mathrm{d}x-\int_0^y(x+y)^2\mathrm{d}y=a^2x-\frac{1}{3}(x+y)^3+\frac{1}{3}x^3\\&=a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3,\end{aligned}$$

故所求通解为
$$a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C.$$

(3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathrm{e}^y}{\partial y}=\mathrm{e}^y$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{e}^y-2y)=\mathrm{e}^y$，因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.
下面用凑微分法求通解：

$$\begin{aligned}\text{方程的左端}&=(\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y)-2y\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y)-\mathrm{d}(y^2)=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y-y^2),\end{aligned}$$

即原方程为

$$d(xe^y - y^2) = 0,$$

故所求通解为

$$xe^y - y^2 = C.$$

（4）将原方程改写成

$$(\sin y - y\sin x)dx + (x\cos y + \cos x)dy = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y - y\sin x) = \cos y - \sin x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y + \cos x) = \cos y - \sin x,$$

因$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端} &= (\sin y - y\sin x)dx + (x\cos y + \cos x)dy \\ &= (\sin y dx + x\cos y dy) + (-y\sin x dx + \cos x dy) \\ &= d(x\sin y) + d(y\cos x),\end{aligned}$$

即原方程为

$$d(x\sin y + y\cos x) = 0,$$

故所求通解为

$$x\sin y + y\cos x = C.$$

（5）$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$，因$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程.

$$\text{方程的左端} = x^2 dx - (y dx + x dy) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) - d(xy),$$

即原方程为

$$d\left(\frac{x^3}{3} - xy\right) = 0,$$

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3} - xy = C.$$

（6）$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y(x - 2y)] = x - 4y$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2) = -2x$. 因$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程不是全微分方程.

（7）$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(1 + e^{2\theta}) = 2e^{2\theta}$，$\frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho e^{2\theta}) = 2e^{2\theta}$，因$\frac{\partial P}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial Q}{\partial \rho}$，故原方程是全微分方程.

$$\text{方程的左端} = d\rho + (e^{2\theta}d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta) = d\rho + d(\rho e^{2\theta}),$$

即原方程为

$$d(\rho + \rho e^{2\theta}) = 0,$$

故所求通解为

$$\rho + \rho e^{2\theta} = C.$$

(8) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$. 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程不是全微分方程.

11. 确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 内的向量 $\boldsymbol{A}(x,y) = 2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i} - x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$为某二元函数 $u(x,y)$的梯度,并求 $u(x,y)$.

解 在单连通区域 G 内,若 $P(x,y)$,$Q(x,y)$具有一阶连续偏导数,则向量 $\boldsymbol{A}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度(此条件相当于 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$是 $u(x,y)$的全微分)的充分必要条件是$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$在 G 内恒成立.

本题中,$P(x,y) = 2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$,$Q(x,y) = -x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4+y^2)^{\lambda} + 2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4+y^2)^{\lambda} - x^2\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3.$$

由等式$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$得到

$$4x(x^4+y^2)^{\lambda}(1+\lambda) = 0,$$

由于 $4x(x^4+y^2)^{\lambda} > 0$,故 $\lambda = -1$,即 $\boldsymbol{A}(x,y) = \frac{2xy\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j}}{x^4+y^2}$.

在半平面 $x>0$ 内,取$(x_0,y_0) = (1,0)$,则得

$$u(x,y) = \int_1^x \frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}\mathrm{d}x - \int_0^y \frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y$$

$$= -\arctan\frac{y}{x^2}.$$

习题 11-4 对面积的曲面积分

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ,在点(x,y,z)处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$,用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 设想将 Σ 分成 n 小块,取出其中任意一块记作 $\mathrm{d}S$(其面积也记作 $\mathrm{d}S$),(x,y,z)为 $\mathrm{d}S$ 上一点,则 $\mathrm{d}S$ 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$\mathrm{d}I_x = (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

以此作为转动惯量元素并积分,即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证　由于 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上可积，故不论把 Σ 如何分割，积分和的极限总是不变的. 因此在分割 Σ 时，可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线. 这样，$f(x,y,z)$ 在 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和，记为

$$\sum_{(\Sigma_1+\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta S_i \text{ 的直径}\} \to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 与二重积分有什么关系？

解　当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，Σ 的方程为 $z=0$，因此在 Σ 上取值的 $f(x,y,z)$ 恒为 $f(x,y,0)$，且 $\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身，因此有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下：

(1) $f(x,y,z)=1$;　　(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2$;

(3) $f(x,y,z)=3z$.

解　抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2+y^2=2$，故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$. 又

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是，

$$(1)\ \iint\limits_{\Sigma} 1\cdot \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{26}{6}\pi.$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint\limits_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t}2\pi\cdot\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}(\sec t)=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{596}{15}=\frac{149}{30}\pi.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}3z\mathrm{d}S=3\iint\limits_{D_{xy}}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}3\iint\limits_{D_{xy}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t}6\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan t\mathrm{d}t-\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t\right)$$

$$=6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t\mathrm{d}(\sec t)-\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}(\sec t)\right]$$

$$=6\pi\left(\frac{13}{3}-\frac{149}{60}\right)=\frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

解 (1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成,其中 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被圆周 $x^2+y^2=1$ 所围的部分;Σ_2 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$.

在 Σ_1 上,$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

在 Σ_2 上,$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为 $x^2+y^2\leqslant 1$.

因此
$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

（2）由题设，Σ 的方程为 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+\frac{9x^2}{3(x^2+y^2)}+\frac{9y^2}{3(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由 $z^2=3(x^2+y^2)$ 和 $z=3$ 消去 z 得 $x^2+y^2=3$，故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 3$. 于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分；

（3）$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h\ (0<h<a)$ 的部分；

（4）$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 （1）在 Σ 上，$z=4-2x-\frac{4}{3}y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot(D_{xy}\text{ 的面积})$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right)=4\sqrt{61}.$$

(2) 在 Σ 上，$z=6-2x-2y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=3$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}[2xy-2x^2-x+(6-2x-2y)]\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)\,\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3[(6-3x-2x^2)(3-x)+x(3-x)^2-(3-x)^2]\,\mathrm{d}x$$

$$=3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)\,\mathrm{d}x=-\frac{27}{4}.$$

(3) 在 Σ 上，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$.

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称，故有

$$\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0,\quad \iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=0.$$

于是
$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\pi(a^2-h^2).$$

(4) Σ 如图 11-9 所示，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 由于 Σ 关于 zOx 面对称，而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数，故

$$\iint_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}S=0,\quad \iint_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}S=0.$$

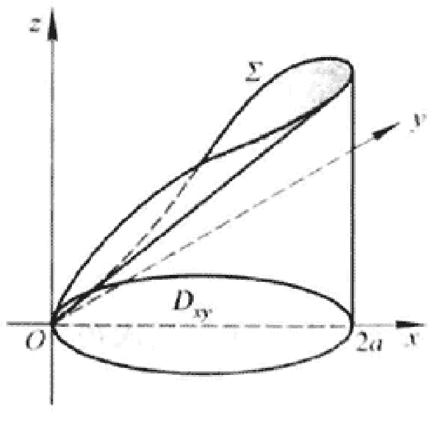


图 11-9

于是

$$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}zx\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量,此壳的面密度为 $\mu=z$.

解　$\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$.

$z_x=x, z_y=y$. 故 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因此

$$M=\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{t=\rho^2}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{分部积分法}}\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^2-\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(3^{\frac{5}{2}}-1)\right]=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解　$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\,\mathrm{d}S$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho = a\sin t} 2\pi a\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t = 2\pi a^4\mu_0\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi a^4\mu_0.$$

习题 11-5 对坐标的曲面积分

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_\Sigma [P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_\Sigma P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint_\Sigma P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i(其面积也记为 ΔS_i),ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$,在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值,则

$$\iint_\Sigma [P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)](\Delta S_i)_{yz}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$= \iint_\Sigma P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint_\Sigma P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时,曲面积分 $\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系?

解 此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身(但不定侧),且在 Σ 上,$z=0$,因此

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 Σ 取上侧时为正号,取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint_\Sigma x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

(2) $\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解　(1) Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，在 Σ 上，$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 因 Σ 取下侧，故

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint\limits_{D_{xy}}\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^22\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=R\sin t}\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5t-\sin^7t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) 由于柱面 $x^2+y^2=1$ 在 xOy 面上的投影为零，因此 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 又，$D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant z\leqslant3\}$，$D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant3,0\leqslant x\leqslant1\}$（图 11－10），因 Σ 取前侧，所以

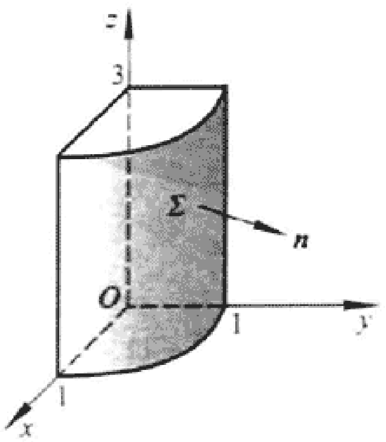


图 11－10

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz+\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\,dzdx$$

$$=\int_0^3 dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy+\int_0^3 dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2\cdot 3\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\pi.$$

(3) 在 Σ 上，$z=1-x+y$. 由于 Σ 取上侧，故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1).$$

由两类曲面积分之间的联系，可得

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]\,dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}[(f+x)-(2f+y)+(f+z)]\,dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\,dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(\Sigma\text{的面积})=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

(4) 在坐标面 $x=0,y=0$ 和 $z=0$ 上，积分值均为零，因此只需计算在 $\Sigma':x+y+z=1$ (取上侧)上的积分值(图 11－11). 下面用两种方法计算.

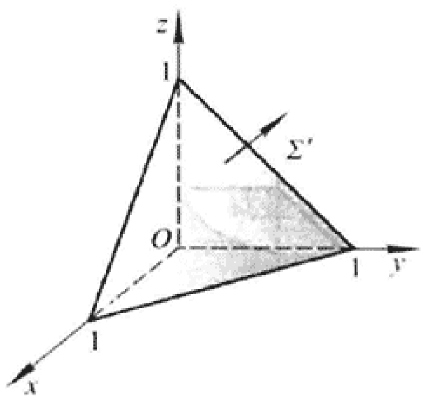


图 11－11

解法一　$$\iint\limits_{\Sigma'}xz\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}x(1-x-y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\frac{1}{24}.$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性，可得

$$\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{24},$$

因此
$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

解法二　利用两类曲面积分的联系，将 $\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 均化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算.

由于 Σ': $x+y+z=1$ 取上侧，故 Σ' 在任一点处的单位法向量

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

于是
$$\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma'} xy\cos\alpha\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma'} xy\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma'} yz\cos\beta\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma'} yz\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此
$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&= \iint_{\Sigma'} (xz + xy + yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_{xy}} [x(1-x-y) + xy + y(1-x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} (-x^2 - y^2 - xy + x + y)\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

于是原式 $=\frac{1}{8}$.

注　计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式：

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&= \iiint_{\Omega} (y+z+x)\mathrm{d}v \xlongequal{\text{对称性}} 3\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v = 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z \\
&= 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y \\
&= 3\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中：

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧；

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由于 Σ: $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 取上侧,故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}(3,2,2\sqrt{3})$$

$$=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),$$

于是 $$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S.$$

(2) 由于 Σ: $z=8-(x^2+y^2)$ 取上侧,故 Σ 在其上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x,2y,1),$$

于是 $$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S.$$

习题 11-6 高斯公式 *通量与散度

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

*(2) $\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

*(3) $\oiint_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为上半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的表面的外侧;

(4) $\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧;

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解　(1) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} 6\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = 6\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$= 6\cdot a\cdot a\cdot\frac{a^2}{2} = 3a^4.$$

(2) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$

$$= 3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot 1\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v = 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$= 3\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3 = 81\pi.$$

(5) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(4z-y)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(2-y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}.$$

注　在计算上面的积分 $\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v$ 时,如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性,可知 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v$,于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}3z\mathrm{d}v=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1z\mathrm{d}z=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

*2. 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量:

(1) $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$,$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面,流向外侧;

(2) $\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$,$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面,流向外侧;

(3) $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$,$\Sigma$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心,半径 $R=3$ 的球面,流向外侧.

解　(1) 通量
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0.$$

(2) 通量
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x-z)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial(-xz^2)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)\mathrm{d}v$$
$$=2a^3+\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x^2-2xz)\mathrm{d}z$$
$$=2a^3-\frac{a^5}{6}=a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right).$$

(3) 通量
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x+3z)}{\partial x}+\frac{\partial(-xz-y)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2+2z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$
$$=3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=108\pi.$$

*3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度:

(1) $\boldsymbol{A}=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=e^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$.

解　(1) $P=x^2+yz, Q=y^2+xz, R=z^2+xy$,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z.$$

(2) $P=e^{xy}, Q=\cos(xy), R=\cos(xz^2)$,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=ye^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2).$$

(3) $P=y^2, Q=xy, R=xz$,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+x+x=2x.$$

4. 设 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明：

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\,dxdydz=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式叫做格林第二公式.

证　由教材本节例 3 证明的格林第一公式知：

$$\iiint_{\Omega}u\Delta v\,dxdydz=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置，得

$$\iiint_{\Omega}v\Delta u\,dxdydz=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz.$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\,dxdydz=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

***5.** 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力（即浮力）的方向铅直向上，其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证　取液面为 xOy 面，z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ. 在物体表面 Σ 上取面积元素 dS, $M(x,y,z)$ 为 dS 上的一点 $(z\leqslant 0)$，Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 dS 所受液体的压力指向内法线方向 $(-\cos\alpha,-\cos\beta,-\cos\gamma)$，压力在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为

$$\rho z\cos\alpha dS,\quad \rho z\cos\beta dS,\quad \rho z\cos\gamma dS.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式可算得

$$F_x=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\rho z\cos\alpha dS=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial x}dv=\iiint_{\Omega}0dv=0,$$

$$F_y = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\beta \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial y}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0,$$

$$F_z = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\gamma \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \rho\mathrm{d}v = \rho V$$

(V 为 Ω 的体积),故合力

$$\boldsymbol{F} = \rho V\boldsymbol{k},$$

此力的方向铅直向上,大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 11-7　斯托克斯公式　*环流量与旋度

1. 试对曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leqslant 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式.

解　按右手法则,Σ 取上侧,Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 1$,从 z 轴正向看去,取逆时针方向.

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}(1 - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}(1 - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (1 - 2\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3}\rho^3\sin\theta\right]_0^1\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta = \pi.$$

Γ 的参数方程可取为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$,$t$ 从 0 变到 2π,故

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}(-\sin^3 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \pi,$$

两者相等,斯托克斯公式得到验证.

*2. 利用斯托克斯公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$,若从 x 轴的正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma}(y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$,其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1(a > 0, b > 0)$,若从 x 轴正向看去,这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$,若从 z 轴正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(4) $\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9, z=0$,若从 z 轴正向看去,这圆周是取逆时针方向.

解　(1) 取 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分,则 Σ 的面积为 πa^2,Σ 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\text{图 } 11-12).$$

由斯托克斯公式,

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y&z&x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

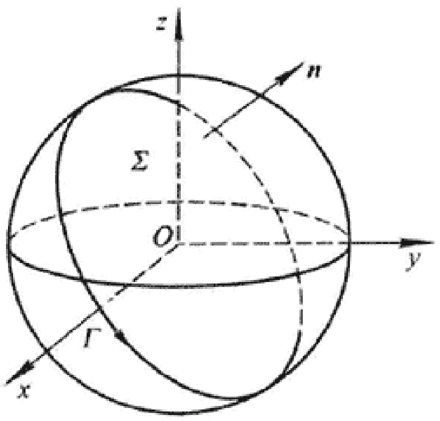


图 11-12

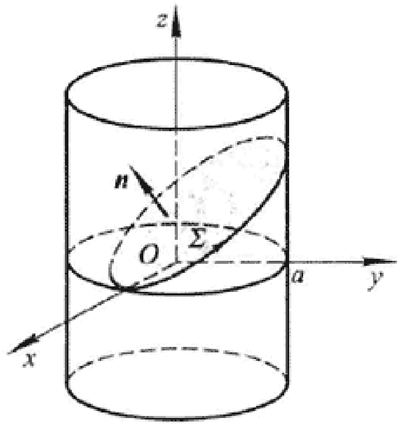


图 11-13

(2) 如图 11-13,取 Σ 为平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 的上侧被 Γ 所围成的部分,Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}&0&\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y-z&z-x&x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S. \qquad (*)$$

现用两种方法来求 $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S$.

解法一　由于 $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \Sigma$ 的面积 A, 而 $A \cdot \cos\gamma = A \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域的面积 $= \pi a^2$, 故

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \pi a^2 \Big/ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

解法二　用曲面积分计算法.

由于在 Σ 上, $z = b - \frac{b}{a}x$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

又 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, 故

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S &= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \pi a^2 \\ &= \pi a\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

将所求得的 $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S$ 代入 $(*)$ 式, 得

$$\text{原式} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \pi a\sqrt{a^2+b^2} = -2\pi a(a+b).$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2 \leqslant 4$. 于是由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S \\ &= -\iint_{\Sigma} (z+3)\mathrm{d}S = -\iint_{D_{xy}} (2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -5 \cdot \pi \cdot 2^2 \\ &= -20\pi.\end{aligned}$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=9$, 取 Σ 为圆域 $x^2+y^2 \leqslant 9$ 的上侧, 则由

斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi.$$

*3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

(1) $\boldsymbol{A} = (2z-3y)\boldsymbol{i} + (3x-z)\boldsymbol{j} + (y-2x)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A} = (z+\sin y)\boldsymbol{i} - (z - x\cos y)\boldsymbol{j}$；

(3) $\boldsymbol{A} = x^2\sin y\boldsymbol{i} + y^2\sin(xz)\boldsymbol{j} + xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

解 (1) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$

(2) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (\cos y - \cos y)\boldsymbol{k}$

$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$

(3) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$

$= [x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i} - y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}$

$+ [y^2 z\cos(xz) - x^2\cos y]\boldsymbol{k}.$

*4. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}$, Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下：

(1) $\boldsymbol{A} = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量；

(2) $\boldsymbol{A} = (y-z)\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$, Σ 为立方体 $\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) Σ 的正向边界曲线 Γ 为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=1$，从 z 轴正向看去 Γ 取逆时针向，Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0$, t 从 0 变到 2π.

由斯托克斯公式，

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2t)\mathrm{d}(\cos t)=0.$$

(2) Σ的边界曲线Γ为xOy面上由直线$x=0,y=0,x=2,y=2$所围成的正方形的边界,从z轴正向看去取逆时针向.由斯托克斯公式,

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z\quad(\text{代入 } z=0)$$

$$=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x=\int_2^0 2\mathrm{d}x=-4.$$

*5. 求下列向量场$\boldsymbol{A}$沿闭曲线Γ(从z轴正向看Γ依逆时针方向)的环流量:

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$为常量),$\Gamma$为圆周$x^2+y^2=1,z=0$;

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$,其中$\Gamma$为圆周$z=2-\sqrt{x^2+y^2},z=0$.

解　(1) Γ的参数方程为$x=\cos t,y=\sin t,z=0,t$从0变到2π,于是所求环流量为

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[(-\sin t)(-\sin t)+\cos t\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

(2) Γ是xOy面上的圆周$x^2+y^2=4$(从z轴正向看Γ依逆时针方向),它的参数方程为$x=2\cos t,y=2\sin t,z=0,t$从0变到$2\pi$.于是所求的环流量为

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z\quad(\text{代入 } z=0)$$

$$= \oint_{\Gamma} x\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} [2\cos t \cdot (-2\sin t) + 8\cos^3 t \cdot 2\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= -4\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\mathrm{d}t + 16\int_0^{2\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$= 0 + 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t^{①}$$

$$= 64 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi.$$

注① $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t \xlongequal{\text{周期性}} 2\int_0^{\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t\right]$,

由于 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t \xlongequal{u=\pi-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u\mathrm{d}u$, 故得

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t.$$

*6. 证明 $\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$.

证 设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, 其中 $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ 均为 x, y, z 的函数,则

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \mathbf{rot}\,((a_x+b_x)\boldsymbol{i} + (a_y+b_y)\boldsymbol{j} + (a_z+b_z)\boldsymbol{k}) \\ &= \left[\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k} \\ &= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right] \\ &= \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

*7. 设 $u = u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数,求 $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,u)$.

解
$$\mathbf{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,u) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}\text{(由于各二阶偏导数连续)}$$
$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

总习题十一

1. 填空：

(1) 第二类曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是________，其中 α,β,γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角；

(2) 第二类曲面积分 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一类曲面积分是________，其中 α,β 与 γ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角.

解　(1) 由教材本章第二节的公式(2-3)，可知第一个空格应填：$\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$；第二个空格应填：切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(5-9)，可知第一个空格应填：$\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；第二个空格应填：法向量.

2. 下题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则有(　　).

(A) $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$

(C) $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　(D) $\iint_\Sigma xyz\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$

解　应选(C). 先说明(A)不对. 由于 Σ 关于 yOz 面对称，被积函数 x 关于 x 是奇函数，所以 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=0$. 但在 Σ_1 上，被积函数 x 连续且大于零，所以 $\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S>0$. 因此 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S\neq 4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$. 类似可说明(B)和(D)不对. 再说明(C)正确. 由于 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称，被积函数 z 关于 x 和 y 均为偶函数，故 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S$；而在 Σ_1 上，字母 x,y,z 是对称的. 故 $\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$，因此有 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$.

3. 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$；

(2) $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$,其中 Γ 为曲线 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t(0 \leqslant t \leqslant t_0)$;

(3) $\int_L (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$,其中 L 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

(4) $\int_\Gamma (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上由 $t_1 = 0$ 到 $t_2 = 1$ 的一段弧;

(5) $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$,其中 L 为上半圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$,沿逆时针方向;

(6) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$,其中 Γ 是用平面 $y = z$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得的截痕,从 z 轴的正向看去,沿逆时针方向.

解　(1) 解法一　L 的方程即为 $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$,故可取 L 的参数方程为 $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t, y = \dfrac{a}{2}\sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{1 + \cos t}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + \cos t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t \\ &= 2a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right) = 2a^2.\end{aligned}$$

解法二　L 的极坐标方程为 $\rho = a\cos\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta = a\mathrm{d}\theta,$$

因此 $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta = 2a^2$.

(2)
$$\begin{aligned}\int_\Gamma z\mathrm{d}s &= \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_0} t\sqrt{2 + t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\sqrt{2 + t^2}\mathrm{d}(2 + t^2) \\ &= \frac{1}{3}(2 + t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left[(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right].\end{aligned}$$

(3)
$$\int_L (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a\cos t) \cdot a(1 - \cos t) + a(t - \sin t) \cdot a\sin t] \mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} t\sin t \mathrm{d}t = a^2 [-t\cos t]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t \mathrm{d}t$$

$$= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.$$

(4)
$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 [(t^4 - t^6) \cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

(5) 如图 11－14,添加有向线段 OA:$y=0$,x 从 0 变到 $2a$,则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得

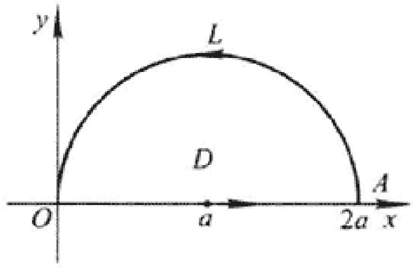


图 11－14

$$\int_{L+OA} (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (\mathrm{e}^x\cos y - \mathrm{e}^x\cos y + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^2,$$

于是
$$\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2 - \int_{OA} (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2 - \int_0^{2a} (\mathrm{e}^x\sin 0 - 2 \cdot 0)\mathrm{d}x = \pi a^2.$$

注　本题通过添加辅助路径并利用格林公式,将难以直接计算的曲线积分化为一个易于计算的二重积分和另一个易于计算的曲线积分之差,从而方便地求得结果.这是格林公式的用处之一,值得注意.

(6) 由 Γ 的一般方程 $\begin{cases} y = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 可得 $x^2 + 2y^2 = 1$. 从而可令 $x = \cos t$,

$y=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, z=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$，$t$ 从 0 变到 2π. 于是

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\cos t\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.\end{aligned}$$

4. 计算下列曲面积分：

（1）$\iint\limits_\Sigma \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$；

（2）$\iint\limits_\Sigma (y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧；

（3）$\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧；

（4）$\iint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 的外侧.

解　（1）将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片，Σ_1 为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_2 为 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为

$$D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant H, -R\leqslant x\leqslant R\}.$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} &= \iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\cdot\int_{-R}^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right]_0^H\cdot\left[R\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^R \\ &= \pi\arctan\frac{H}{R}.\end{aligned}$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数，积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称，故

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

由此得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$,取上侧,则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}v=0,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant h^2\}.$$

在计算 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时,由对称性易知 $\iint\limits_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,又 $\iint\limits_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}h^4.\end{aligned}$$

从而得

$$\text{原式}=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

注　本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算,则运算将十分繁复.现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式,就将原积分化为辅助曲面上的一个容易计算的曲面积分,从而达到了化繁为简、化难为易的目的.这种做法与前面第3(5)题利用格林公式化简曲线积分计算的做法是类似的,请读者注意比较,并思考这样的问题:要使这种做法可行,所给的曲线积分(曲面积分)应具备什么条件?

(3) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$,取下侧,则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=3\cdot\frac{2\pi R^3}{3}=2\pi R^3,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\pi R^3-0=2\pi R^3.\end{aligned}$$

(4) 解法一　将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片,其中 $\Sigma_1:z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant0,y\geqslant0)$,

取上侧；Σ_2 : $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$，取下侧．$\Sigma_1$ 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域均为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$（图11－15）．于是

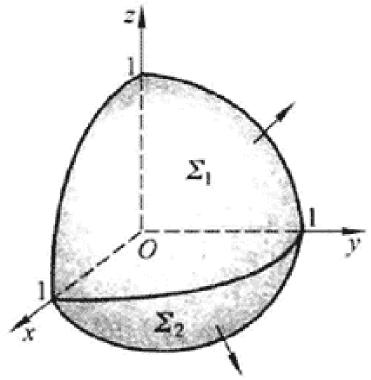


图 11－15

$$\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\sin t}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t-\sin^5 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{15},$$

$$\iint_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{15},$$

因而
$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}.$$

解法二　应用高斯公式计算．

添加辅助曲面 Σ_3：$x=0$（取后侧）；Σ_4：$y=0$（取左侧），则有

$$\iint_{\Sigma_3} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_4} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

在由 Σ,Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(xyz)}{\partial z}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{15}.$$

5. 证明：$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

证　G 为平面单连通区域，在 G 内 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在 G 内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取折线积分路径$(0,1)\to(x,1)\to(x,y)$(图 11－16)，则

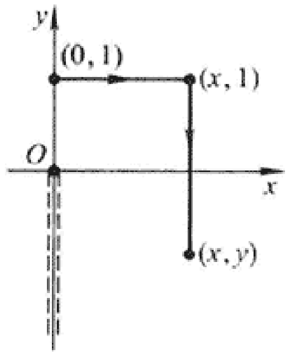


图 11－16

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^y\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_1^y\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).\end{aligned}$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F}=-\dfrac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证　半平面 $x>0$ 是单连通区域. 在此区域内，$P=-\dfrac{kx}{\rho^3}$，$Q=-\dfrac{ky}{\rho^3}$具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内，场力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线 L 所作的功，即

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-k\int_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\rho^3}$$

与路径无关.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

(1) 证　因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面这个单连通区域内处处成立，所以在上半平面内曲线积分与路径 L 无关.

(2) 解　由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的有向折线，从而得

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时，$\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=0$，由此得

$$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

8. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解　设质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由对称性可知质心位于 z 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 由于

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma z\mathrm{d}S&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\cdot\pi a^2=\pi a^3,\end{aligned}$$

又

$$\Sigma \text{ 的面积 } A=2\pi a^2,$$

故
$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{A}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$

所求的质心为 $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

9. 设 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数,分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

(1) $\iint\limits_{D}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{L}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint\limits_{D}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 与 v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称二维拉普拉斯算子.

证 (1) 如图 11-17,$\boldsymbol{n}$ 为有向曲线 L 的外法线向量,$\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的切线向量. 设 x 轴到 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为 φ 和 α,则 $\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$,且 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi,\sin\varphi$;$\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\sin\alpha$. 于是

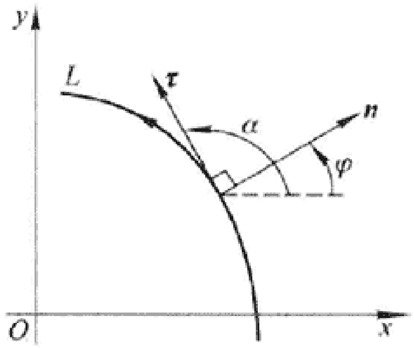


图 11-17

$$\oint_{L}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_{L}v(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi)\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{L}v(u_x\sin\alpha-u_y\cos\alpha)\mathrm{d}s\ (\cos\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\sin\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}y)$$

$$=\oint_{L}vu_x\mathrm{d}y-vu_y\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D [(u_x v_x + v u_{xx}) + (u_y v_y + v u_{yy})] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D v(u_{xx} + u_{yy}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D v\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (\mathbf{grad}\ u \cdot \mathbf{grad}\ v) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u,v 的位置,可得

$$\iint_D u\Delta v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D (\mathbf{grad}\ v \cdot \mathbf{grad}\ u) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端,即得所需证明的等式.

*10. 求向量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解　通量 $\Phi = \iint_\Sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \mathrm{d}v$$

$$= \iiint_\Omega (1 + 1 + 1) \mathrm{d}v = 3 \iiint_\Omega \mathrm{d}v = 3 \cdot 1 = 3.$$

11. 求力 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功,其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,从 z 轴正向看去,沿顺时针方向.

解　$W = \oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z.$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

解法一　化为定积分直接计算. 如图 11－18, Γ 由 AB, BC, CA 三条有向线段组成,

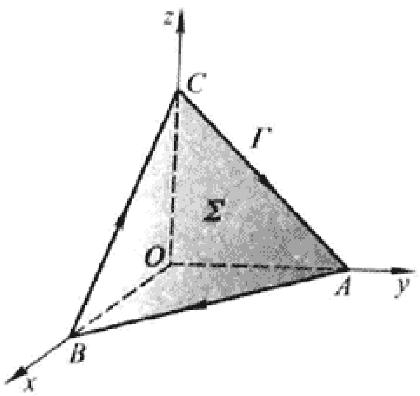


图 11－18

$$AB: z=0, x=t, y=1-t, t\text{ 从 }0\text{ 变到 }1;$$
$$BC: y=0, x=t, z=1-t, t\text{ 从 }1\text{ 变到 }0;$$
$$CA: x=0, y=t, z=1-t, t\text{ 从 }0\text{ 变到 }1.$$

于是

$$\int_{AB} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{AB} y\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2},$$
$$\int_{BC} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{BC} x\mathrm{d}z=\int_1^0 t\cdot(-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2},$$
$$\int_{CA} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{CA} z\mathrm{d}y=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

因此
$$W=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\frac{3}{2}.$$

*解法二　利用斯托克斯公式计算. 取 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 的下侧被 Γ 所围的部分,则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,由斯托克斯公式得

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$
$$=\iint_\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$
$$=\sqrt{3}\cdot(\Sigma\text{ 的面积})=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

第十二章
无穷级数

习题 12－1　常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解　(1) $\dfrac{1+1}{1+1^2}+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\dfrac{1+4}{1+4^2}+\dfrac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

(3) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{5^5}-\cdots$.

(4) $\dfrac{1!}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\dfrac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

解　设级数的部分和为 s_n.

(1) 因为

$$\begin{aligned}s_n&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}-1,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

(2) 由于 $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,从而

$$s_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

(3) 由于 $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{n\pi}{6}}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}=\dfrac{\cos\dfrac{2n-1}{12}\pi-\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}$,从而

$$s_n=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right),$$

因为当 $n\to\infty$ 时,$\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在,所以 s_n 的极限不存在,即级数发散.

(4) $s_n=\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)$,

因 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$,故级数发散.

3. 判定下列级数的收敛性:

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 (1) 此级数为公比 $q=-\dfrac{8}{9}$ 的等比级数,因 $|q|<1$,故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$,不满足级数收敛的必要条件,故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q=\dfrac{3}{2}$ 的等比级数,因 $|q|>1$,故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}$,注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 分别是公比 $q=\dfrac{1}{2}$ 与 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比级数,而 $|q|<1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 均收敛. 根据收敛级数的性质可知,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$ 收敛.

*4. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(2) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}\right)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}|s_{n+p}-s_n|&=|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots+u_{n+p}|\\&=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\frac{(-1)^{n+4}}{n+3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|\\&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\begin{cases}\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故 $$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}>0,\forall p\in\mathbf{Z}^+.$$

于是,当 p 为奇数时,

$$|s_{n+p}-s_n| = \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时,

$$|s_{n+p}-s_n| = \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

因此,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,对任何正整数 p,都有

$$|s_{n+p}-s_n| < \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

根据柯西收敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p=3n$,则必有

$$|s_{n+p}-s_n| = \left|\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+4}+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right|$$

$$>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}>\underbrace{\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}}_{n\text{个}}=\frac{1}{4}.$$

于是对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n>N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p=3n$ 时,就有

$$|s_{n+p}-s_n| > \varepsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知,级数发散.

注 柯西收敛原理是这样叙述的:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件为"对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对任意的正整数 p,都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$".

因此按柯西收敛原理,判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定,即"对某个正数 ε_0,不论 N 取什么正整数,至少有一个 $n(>N)$ 且至少有一个 $p\in\mathbf{Z}^+$,使得 $|s_{n+p}-s_n|\geqslant\varepsilon_0$".

(3) $|s_{n+p}-s_n| = |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$

$$=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}.$$

由此可知,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\log_2\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p,都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$. 按柯西收敛原理,该级数收敛.

(4) 本题与(2)类同,因 $u_n=\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)>\frac{1}{3n+1}\geqslant\frac{1}{4n}$,故对 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}$,不论 n 取什么正整数,取 $p=n$ 时,就有 $|s_{n+p}-s_n|=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. 因此该级数发散.

习题 12-2 常数项级数的审敛法

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解 (1) 解法一 $u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故各项乘 $\frac{1}{2}$ 后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散,由比较审敛法知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

解法二 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由比较审敛法知原级数

发散.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}}=\pi$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛,故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 当 $0<a\leqslant 1$ 时,$\dfrac{1}{1+a^n}\geqslant\dfrac{1}{2}$,一般项不趋于零,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散;当 $a>1$ 时,$\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 收敛,故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

解　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\Big/\dfrac{3^n}{n2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{3}{2}>1$,故级数发散.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=\dfrac{1}{3}<1$,故级数收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=\dfrac{2}{e}<1$,故级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

***3.** 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^{n}}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^{n}$，其中 $a_n\to a(n\to\infty)$，a_n,b,a 均为正数．

解　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数收敛．

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，故级数收敛．

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}<1$，故级数收敛．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$．

当 $b<a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$，故级数收敛；

当 $b>a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$，故级数发散；

当 $b=a$ 时，级数的收敛性不能确定$\Bigg($例如，$b=1,a_n=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散；又如，$b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to1(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛$\Bigg)$.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\dfrac{3}{4}+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}+\cdots+n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}+\cdots$；

(2) $\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\dfrac{\pi}{3^{n}}$；

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\cdots$；

(6) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2a+b}+\cdots+\dfrac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}<1$，由比值审敛法知级数收敛．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{4}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0<1$，由比值审敛法知级数收敛．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}\Big/\dfrac{1}{n}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由极限形式的比较审敛法知原

级数发散.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\Big/\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3^n}}{\dfrac{\pi}{3^n}}=\pi$,而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛,故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1\neq0$,故级数发散.

(6) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na+b}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{n}}=\dfrac{1}{a}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛.如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}+\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{\ln2}-\dfrac{1}{\ln3}+\dfrac{1}{\ln4}-\dfrac{1}{\ln5}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是发散的;又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数,满足 $|u_n|>|u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{3}<1$,由比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,故原级数绝对收敛.

(3) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3\cdot2^n}$,因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot2^n}$ 是公比 $q=\dfrac{1}{2}(|q|<1)$ 的等比级数,故收敛,从而原级数绝对收敛.

(4) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, $|u_n|=\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 是发散的,故由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数,满足 $|u_n|>|u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$, $|u_n|=\dfrac{2^n\cdot 2^n\cdot\cdots\cdot 2^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$,由于 $2^n>k(k=1,2,\cdots,n)$,故 $|u_n|>1$,即原级数的一般项 u_n 当 $n\to\infty$ 时不趋于零,故该级数发散.

习题 12-3　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(2) $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\dfrac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$;

(4) $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;

(5) $\dfrac{2}{2}x+\dfrac{2^2}{5}x^2+\dfrac{2^3}{10}x^3+\cdots+\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$,故收敛半径为1,收敛区间是$(-1,1)$.

(2) $n\geqslant 1$ 起,$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big/\dfrac{1}{n^2}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$,故收敛半径为1,收敛区间为$(-1,1)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}=0$,故收敛半径为$+\infty$,收敛区间是$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{3}$,故收敛半径为3,收敛区间为$(-3,3)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$,故收敛半径为$\dfrac{1}{2}$,收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数,把 $(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 视为数项级数的一般项 u_n,

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2=|x|^2,$$

当 $|x|<1$ 时,级数绝对收敛;当 $|x|>1$ 时,因一般项 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$,级数发散.故原级数收敛半径为 1,收敛区间为 $(-1,1)$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

解法一　与(6)类似,将它按数项级数处理,用比值法确定收敛半径和收敛区间.

解法二　令 $t=x^2$,先讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$ 的收敛区间.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

故该级数的收敛半径为 2,因此,原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$,收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$,故收敛半径为 1.当 $|x-5|<1$ 时,级数收敛;当 $|x-5|>1$ 时,级数发散.故级数的收敛区间为 $(4,6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$.

解　(1) 容易求出此级数的收敛半径为 1.当 $-1<x<1$ 时,

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}dx\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处发散,故它的和函数 $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1.当 $-1<x<1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0，故得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}&=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x.\end{aligned}$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散，故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\quad(-1<x<1).$$

（3）记级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，其收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0，故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散，故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

（4）容易求得此级数的收敛半径为 1，收敛域为 $(-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)',$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+2}=x^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{x^3}{1-x}$. 又 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)'=\left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)'=\dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$，故原级数的和函数

$$s(x)=x^2\cdot\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}=\frac{3x^4-2x^5}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

习题 12-4　函数展开成幂级数

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这个函数．

解　在定点 x_0 处，因

$$f^{(n)}(x_0)=\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间),而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,于是得

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

所以在整个数轴上,有

$$f(x)=\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;　　(2) $\ln(a+x)(a>0)$;

(3) a^x;　　(4) $\sin^2x$;

(5) $(1+x)\ln(1+x)$;　　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$,故

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

于是

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$,利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,+1],$$

得

$$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n,\quad x\in(-a,+a].$$

(3) 利用 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$,得

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) 解法一 利用

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

得

$$\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

解法二 $(\sin^2x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分,得

$$\sin^2x=\int_0^x(\sin^2x)'\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(5) 解法一 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n-1)n},\quad x\in(-1,1),$$

又在 $x=1$ 处,上式右端的幂级数收敛,且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续,故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n(n-1)},\quad x\in(-1,1].$$

解法二 利用 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, x\in(-1,1]$,得

$$(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n-1}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},\quad x \in (-1,1].$$

(6) 解法一　利用 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots, x \in [-1,1]$，并因为 $\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2} - 1$，以 x^2 替换上面幂级数中的 x，得

$$\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2} - 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n} + \cdots.$$

在 $(-1,1)$ 内将上式两端对 x 求导，得

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1} + \cdots$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad x \in (-1,1).$$

在 $x = \pm 1$ 处上式右端的级数均收敛且函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续，故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad x \in [-1,1].$$

解法二　将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n\quad (x \in (-1,1])$$

中的 x，得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n},\quad x \in [-1,1].$$

从而得

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n+1}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad x \in [-1,1].$$

3. 将下列函数展开成 $x-1$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\sqrt{x^3}$；　　　　(2) $\lg x$.

解　(1) 当 $m > 0$ 时，因

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$$x \in [-1,1],$$

而
$$\sqrt{x^3} = [1+(x-1)]^{\frac{3}{2}},$$

在以上二项展开式中取 $m = \dfrac{3}{2}$，并用 $x-1$ 替换其中的 x，得

$$\sqrt{x^3} = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)(x-1)^2 + \cdots +$$

$$\frac{1}{n!}\,\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!}(x-1)^{n+2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},\quad x \in [0,2].$$

(2) $\lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]$，利用

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x \in (-1,1],$$

将上式中的 x 换成 $x-1$，得

$$\lg x = \frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad x \in (0,2].$$

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $x + \dfrac{\pi}{3}$ 的幂级数.

解 $\cos x = \cos\left[\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right] = \dfrac{1}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).$

将 $x + \dfrac{\pi}{3}$ 替换以下两式

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

中的 x，得

$$\cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],\quad x \in (-\infty,+\infty).$$

5. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解　利用 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$ 得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{x-3}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n,\quad \frac{3-x}{3}\in(-1,1),$$

即

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad x\in(0,6).$$

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

解　$\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$,

其中

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$\dfrac{x+4}{3}\in(-1,1)$, 即 $x\in(-7,-1)$;

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$\dfrac{x+4}{2}\in(-1,1)$, 即 $x\in(-6,-2)$. 于是

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,$$

$x\in(-7,-1)\cap(-6,-2)=(-6,-2)$.

习题 12－5　函数的幂级数展开式的应用

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1) $\ln 3$(误差不超过 0.000 1);

(2) $\sqrt{e}$(误差不超过 0.001);

(3) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过 0.000 01);

(4) $\cos 2°$(误差不超过 0.000 1).

解 (1) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right),\quad x\in(-1,1)$.

令 $\frac{1+x}{1-x}=3$，可得 $x=\frac{1}{2}$. 从而

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\cdots\right].$$

$$\begin{aligned}|r_n|&=2\left[\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}+\cdots\right]\\&=\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left[1+\frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+3)2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+5)2^{2n+5}}+\cdots\right]\\&<\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)\\&=\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}},\end{aligned}$$

$$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.000\,12,$$

$$|r_6|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.000\,03<10^{-4},$$

故取 $n=6$，则

$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right)$，考虑到舍入误差，计算时应取五位小数，从而得 $\ln 3\approx 1.098\,6$.

(2) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\cdots+\frac{1}{n!2^n}+\cdots.$$

$$\begin{aligned}r_n&=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!2^{n+2}}+\cdots\\&=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{(n+2)\cdot 2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdot 2^2}+\cdots\right]\\&<\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(n+1)!2^n},\end{aligned}$$

$$r_4 < \frac{1}{5!\,2^4} \approx 0.0005 < 10^{-3},$$

故取 $n=4$,计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} \approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{2^9+10} = 2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$,因

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1<x<1).$$

故

$$\sqrt[9]{522} = 2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}} = 2\left[1 + \frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9} + \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}} + \cdots + \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\cdot\frac{10^n}{2^{9n}} + \cdots\right]$$

$$= 2\cdot\left(1 + \frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9} - \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}} + \cdots\right)$$

$$= 2 + \frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^9} - \frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10^2}{2^{18}} + \cdots.$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数,故有

$$|r_3| \leqslant u_4 = \frac{8\cdot 17}{3\cdot 9^3}\cdot\frac{10^3}{2^{27}} < 10^{-6}.$$

取 3 项,并在计算时取六位小数,可得

$$\sqrt[9]{522} \approx 2 + \frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^9} - \frac{8}{9^2}\cdot\frac{10^2}{2^{18}} \approx 2.00430.$$

(4)
$$\cos 2^\circ = \cos\frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \cdots,$$

上式是交错级数,

$$|r_2| \leqslant u_3 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < 10^{-7},$$

故取 2 项并在计算时取五位小数,可得

$$\cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值：

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$（误差不超过 0.000 1）；

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$（误差不超过 0.001）.

解 (1) $$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}[1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots]\mathrm{d}x$$
$$=\left(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots,$$

上式右端为一交错级数，有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000\,009<10^{-4},$$

故取 3 项，并在计算时取五位小数，可得

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.494\,0.$$

(2) 因 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1<x<1)$，

故 $$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots,$$

由于

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.000\,2<10^{-3},$$

所以取 3 项，并在计算时取四位小数，可得

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{25}\approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解：

(1) $y'-xy-x=1$；

(2) $y''+xy'+y=0$；

(3) $(1-x)y'=x^2-y$.

解 (1) 设方程的解为 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$（$a_0$ 为任意常数），代入方程，则有如下竖式（注意对齐同次幂项）

$$
\begin{array}{rl}
y' = & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\
-xy = & \quad -a_0x \quad -a_1x^2 - \cdots \qquad\qquad -a_{n-1}x^n - \cdots \\
-x = & \quad -x \\
\hline
\end{array}
$$

$1 = a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \cdots$ 比较系数可得

$$
a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{a_0+1}{2},
$$

$$
a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0+1}{2\times 4},
$$

$$
a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{3\times 5}, \qquad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0+1}{2\times 4\times 6}, \cdots,
$$

$$
a_{2n-1} = \frac{1}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}, \quad a_{2n} = \frac{a_0+1}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} = \frac{a_0+1}{n!2^n}.
$$

不难求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 的收敛域都是$(-\infty, +\infty)$,故

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} + (a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n} - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} + (a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1.
\end{aligned}
$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{\frac{x^2}{2}}$,记 $a_0 + 1 = C$,$1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1) = (2n-1)!!$,则

$$
y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1} - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).
$$

(2) 设 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 是方程的解,其中 a_0, a_1 是任意常数,则

$$
y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},
$$

$$
y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,
$$

代入方程 $y'' + xy' + y = 0$,得

$$
\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n]x^n = 0.
$$

故必有

$$
(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0,
$$

即

$$
a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad (n = 0,1,2,\cdots).
$$

可见，当 $n=2(k-1)$ 时，

$$a_{2k}=\left(-\frac{1}{2k}\right)a_{2k-2}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)a_0$$
$$=\frac{a_0(-1)^k}{k!2^k}.$$

当 $n=2k-1$ 时，

$$a_{2k+1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)a_{2k-1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1$$
$$=\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域均为 $(-\infty,+\infty)$，故

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^n}{n!2^n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},$$

即
$$y=a_0\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 设 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解，代入方程，得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

有
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^2,$$

将上式左边第一个级数写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=x^2.$$

比较系数，得

$$a_1+a_0=0,\quad 2a_2=0,\quad 3a_3-a_2=1,$$
$$(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n=0\quad(n\geqslant 3).$$

即
$$a_1=-a_0,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n(n\geqslant 3),$$

或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 4).$$

于是 $y=a_0-a_0x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\cdots+\frac{2}{n(n-1)}x^n+\cdots$，或写成

$$y = a_0(1-x) + x^3\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n + \cdots\right].$$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初值条件的特解：

(1) $y' = y^2 + x^3, y\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$;

(2) $(1-x)y' + y = 1 + x, y\big|_{x=0} = 0$.

解　(1) 因 $y\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$，故设方程的特解为 $y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

代入方程，有

$$\begin{aligned} & a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ &= x^3 + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \Big[a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + \cdots \\ &\quad + \Big(\sum_{i+j=n} a_i a_j\Big)x^n + \cdots\Big]. \end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned} & a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2 - a_1^2)x^2 + (4a_4 - a_3 - 2a_1a_2)x^3 \\ & + \cdots + \Big[(n+1)a_{n+1} - a_n - \sum_{i+j=n} a_i a_j\Big]x^n + \cdots = \frac{1}{4} + x^3. \end{aligned}$$

比较系数，得

$$a_1 = \frac{1}{4},\quad 2a_2 - a_1 = 0,\quad 3a_3 - a_2 - a_1^2 = 0,\quad 4a_4 - a_3 - 2a_1a_2 = 1,$$
$$\cdots,(n+1)a_{n+1} - a_n - \sum_{i+j=n} a_i a_j = 0\quad (n \geqslant 4).$$

依次解得　$a_1 = \frac{1}{4},\quad a_2 = \frac{1}{8},\quad a_3 = \frac{1}{16},\quad a_4 = \frac{9}{32},\cdots.$

故
$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots.$$

(2) 因 $y\big|_{x=0} = 0$，故设 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的特解，则 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$，代入方程，有

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x,$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x,$$

或写成

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数，得 $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n(n\geqslant 2)$，或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 3).$$

故 $$y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}x^n+\cdots.$$

5. 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$，并利用此结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解　(1) 因为

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

以上三式相加得

$$y''(x)+y'(x)+y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,$$

所以函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$.

(2) $y''+y'+y=e^x$ 对应的齐次方程 $y''+y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+r+1=0,$$

根为 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，因此齐次方程的通解为

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

设非齐次微分方程的特解为 $y^*=Ae^x$，代入方程 $y''+y'+y=e^x$，得 $A=\frac{1}{3}$，于是 $y^*=\frac{1}{3}e^x$，且非齐次微分方程的通解为

$$y=Y+y^*=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x.$$

由(1)知，幂级数的和函数 $y(x)$ 满足：$y(0)=1, y'(0)=0$，由此定出上式中的 C_1 与 C_2. 令

$$y(0)=1=C_1+\frac{1}{3},$$

$$y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3},$$

解得 $C_1=\frac{2}{3}$, $C_2=0$. 于是由微分方程初值问题解的唯一性,可得所求幂级数的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^{x}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

6. 利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解　由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 知

$$\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x\cos x=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{ix})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{ix})=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$\begin{aligned}e^{(1+i)x}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+i)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}e^x\cos x&=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

*习题 12－6　函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

1. 已知函数序列 $s_n(x)=\sin\frac{x}{n}(n=1,2,3,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 0.

(1) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时, $s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε?

(2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

解　(1) 由于 $|s_n(x)-0|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}$,因此对于正数 ε,取 $N(\varepsilon,x)\geqslant\frac{|x|}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,就有

$$|s_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}<\varepsilon.$$

证　(2) 记 $M=\max\{|a|,|b|\}$,则 $\forall x\in[a,b]$, $|x|\leqslant M$,于是

$$|s_n(x)-0| \leqslant \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{M}{n}.$$

故 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 都有

$$|s_n(x)-0| \leqslant \frac{|x|}{n} < \frac{M}{N} < \varepsilon,$$

即 $s_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

2. 已知级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和；

(2) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大，能使当 $n>N$ 时，级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε；

(3) 分别讨论级数在区间 $[0,1]$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上的一致收敛性.

解　(1) 设该级数的和函数为 $s(x)$，当 $x=0$ 时，$s(0)=0$；当 $x\neq 0$ 时，该级数是公比为 $\frac{1}{1+x^2}$ 的等比级数，且 $\frac{1}{1+x^2}<1$，故

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

于是

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots \\ &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\left[1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots\right]. \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$r_n(x)=0$，$\forall \varepsilon>0$，取 $N=1$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|r_n(x)|<\varepsilon;$$

当 $x\neq 0$ 时，$r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$，$\forall \varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），取

$$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}\right]+1,$$

则当 $n>N$ 时，

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\varepsilon.$$

(3) 该级数的各项 $u_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}(n=0,1,2,\cdots)$ 在区间[0,1]上是连续的,如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛,则由定理1知,其和函数 $s(x)$ 在[0,1]上连续. 今 $s(x)$ 在[0,1]有间断点 $x=0$,由此推知该级数在[0,1]上不一致收敛.

在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上,因为

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\leqslant\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以, $\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\log_{\frac{4}{5}}\varepsilon]+1$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,有

$$|r_n(x)|\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\varepsilon.$$

即级数在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $0<x<1$.

解 (1) 此级数为交错级数,且满足莱布尼茨定理的条件.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}}<\frac{1}{n},$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|r_n(x)|<\varepsilon,$$

即该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$,其部分和函数

$$s_n(x)=(1-x)+(x-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n+1})=1-x^{n+1},$$

有和函数

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x^{n+1})=1,\quad x\in(0,1).$$

且

$$|r_n(x)|=|s_n(x)-s(x)|=x^{n+1},\quad x\in(0,1).$$

取一列 $x_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}(n=1,2,\cdots)$, $x_n\in(0,1)$. 于是对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$,不论 n 多么

大，总有 $x_n \in (0,1)$，使得

$$|r_n(x_n)| = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

因此，该级数在开区间(0,1)内不一致收敛．

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$, $-\infty < x < +\infty$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, $-\infty < x < +\infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n!}$, $|x| < 10$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}$, $0 \leqslant x < +\infty$.

证　(1) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，因为 $|\cos nx| \leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛，从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛．

(2) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，因为 $|\sin nx| \leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}\right| \leqslant \frac{1}{(n^4 + x^4)^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛．

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{e^{nx}}$，由于当 $x \in [0, +\infty)$ 时，

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \frac{1}{3!}(nx)^3 + \cdots > \frac{1}{2!}(nx)^2 = \frac{n^2 x^2}{2},$$

故

$$\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right| < \frac{2}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛．

(4) $\forall x \in (-10, 10)$，$\left|\dfrac{e^{-nx}}{n!}\right| < \dfrac{(e^{10})^n}{n!}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(e^{10})^n}{n!}$ 收敛（收敛于 $e^{e^{10}} - 1$），故原级数在 $(-10, 10)$ 上一致收敛．

(5) $\forall x \in [0, +\infty)$，由于 $0 < e^{-nx} \leqslant 1$，故

$$\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right| = \frac{1-e^{-nx}}{n^2+x^2} < \frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,从而原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

习题 12-7 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π,试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为:

(1) $f(x)=3x^2+1(-\pi\leqslant x<\pi)$;

(2) $f(x)=e^{2x}(-\pi\leqslant x<\pi)$;

(3) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\leqslant x<0, \\ ax, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$ (a,b 为常数,且 $a>b>0$).

解 (1) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\mathrm{d}x=2(\pi^2+1)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(3x^2+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}6x\sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{6}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{12}{n^2}(-1)^n-\frac{6}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n 12}{n^2}(n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

由于 $(3x^2+1)\sin nx$ 是奇函数,故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且在$(-\infty,+\infty)$内连续,故

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(e^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}n\sin nx\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\left(e^{2x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}n\cos nx\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi} - \frac{n^2}{4}a_n,$$

故

$$a_n = \frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi} \quad (n=1,2,\cdots);$$

用分部积分法得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin nx\,dx = -\frac{n}{2}a_n = -\frac{n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi} \quad (n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处不连续，故

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx - n\sin nx)\right],$$

$$x \neq (2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

(3)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} bx\,dx + \int_0^{\pi} ax\,dx\right) = \frac{\pi}{2}(a-b).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} bx\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} ax\cos nx\,dx\right),$$

在上式右端第一个积分中令 $x=-t$，

$$\int_{-\pi}^{0} bx\cos nx\,dx = \int_0^{\pi}(-bt\cos nt)\,dt = \int_0^{\pi}(-bx\cos nx)\,dx,$$

故

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(a-b)x\cos nx\,dx = \frac{a-b}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{a-b}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n] \quad (n=1,2,\cdots);$$

同理，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} bx\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} ax\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(a+b)x\sin nx\,dx = \frac{a+b}{n\pi}\left(-x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{a+b}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}\pi + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{a+b}{n}(-1)^{n+1} (n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处不连续，故

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},$$

$$x \neq (2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x) = 2\sin\frac{x}{3}(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$；

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

解　(1) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数，$\varphi(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内连续，$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点．又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件，故在 $(-\pi,\pi)$ 内，它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

由于 $2\sin\dfrac{x}{3}$ 是奇函数，故 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$；

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin\frac{x}{3}\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}{n+\frac{1}{3}}\right] \\ &= \frac{6}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1}-\frac{\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1}\right] \\ &= (-1)^{n+1}\cdot\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}\quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

(2) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数，它在 $(-\pi,\pi)$ 内连续，$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点．又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件，故在 $(-\pi,\pi)$ 内它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\right)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\quad (n=1,2,\cdots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}\quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\right. \\ & \left.\left[\frac{-n+(-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\},\quad x\in(-\pi,\pi). \end{aligned}$$

3. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 是偶函数,故 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{2n-1}+\frac{\cos n\pi}{2n+1}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,且在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\\ x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)$ 是奇函数,故 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi n^2}+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi}{n}$$
$$=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx,\quad x\neq(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

解　作

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$$

$\varphi(x)$是$f(x)$的奇延拓. 令$\Phi(x)$是$\varphi(x)$的周期延拓,则$\Phi(x)$满足收敛定理的条件,而在 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,又在$(0,\pi]$上,$\Phi(x)\equiv f(x)$,因此$\Phi(x)$的傅里叶级数在$(0,\pi]$上收敛于$f(x)$.

$$a_n=0(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad x\in(0,\pi].$$

6. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解　(1) 展开成正弦级数.

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[0,\pi],\\ -2x^2, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

是$f(x)$的奇延拓,又$\Phi(x)$是$\varphi(x)$的周期延拓函数,则$\Phi(x)$满足收敛定理的条件,而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,又在$[0,\pi]$上$\Phi(x)\equiv f(x)$,故它的傅里叶级数在$[0,\pi)$上收敛于$f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx,\quad x\in[0,\pi).$$

（2）展开成余弦级数．

令 $\varphi(x)=2x^2, x\in(-\pi,\pi]$ 是 $f(x)$ 的偶延拓，又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续，又在 $[0,\pi]$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$，故它的傅里叶级数在 $[0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$．

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{8}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi].$$

7．设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π．证明：

（1）若 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0,\ a_{2k}=0,\ b_{2k}=0$ $(k=1,2,\cdots)$；

（2）若 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0,\ b_{2k+1}=0(k=0,1,2,\cdots)$．

证　（1）

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}[-f(x-\pi)]\mathrm{d}x\right],\end{aligned}$$

在上式第二个积分中令 $x-\pi=u$，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\mathrm{d}u\right]=0.$$

同理可得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}[-f(x-\pi)]\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]\end{aligned}$$

及

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right].$$

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$\cos(n\pi+nu)=\cos nu, \sin(n\pi+nu)=\sin nu$，于是有

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos 2ku\mathrm{d}u\right]=0,$$

及

$$b_{2k}=0 \quad (k\in \mathbf{N}^*).$$

(2) 与(1) 的做法类似,有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right].$$

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,$\cos(n\pi+nu)=-\cos nu$, $\sin(n\pi+nu)=-\sin nu$,故有

$$a_{2k+1}=0,\quad b_{2k+1}=0 \quad (k\in\mathbf{N}).$$

习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=1-x^2\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

解 (1) 函数 $f(x)$ 是半周期 $l=\frac{1}{2}$ 的偶函数,故

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin(2n\pi x)-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos(2n\pi x)+\frac{2}{8n^3\pi^3}\sin(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \quad (n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续,故有

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l=1$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{0}x\cos(n\pi x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos(n\pi x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos(n\pi x)\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{1}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{0}x\sin(n\pi x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin(n\pi x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,其间断点为 $x=2k,2k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}$, 故有

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos(n\pi x)+\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\pi x)\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\Big\backslash\left\{2k,2k+\frac{1}{2}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

(3) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l=3$.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\mathrm{d}x\right]=-1,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,其间断点为 $x=3(2k+1),k\in\mathbf{Z}$, 故有

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},$$

$$x \in \mathbf{R}\setminus\{3(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

(1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \\ l-x, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l; \end{cases}$

(2) $f(x) = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

解　(1) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$，又将 $\varphi(x)$ 作周期延拓得 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数，$\Phi(x)$ 处处连续，又满足收敛定理的条件，且在 $[0,l]$ 上，$\Phi(x) \equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$，则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos n\pi\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t = (-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}} t\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$b_n = \frac{2}{l}[1+(-1)^{n-1}]\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

当 $n=2k$ 时，$b_{2k}=0$；当 $n=2k-1$ 时，

$$b_{2k-1} = \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}(-1)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad x \in [0,l].$$

展开为余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$，再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数．$\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件，且在 $[0,l]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x\right] = \frac{l}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$，则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = (-1)^n\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{l}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{l}[1+(-1)^n]\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

当 $n=2m-1$ 时，$a_{2m-1}=0$；当 $n=2m$ 时，

$$\begin{aligned}a_{2m} &= \frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2m)^2}[(-1)^m-1]\\ &= \begin{cases}0, & m=2k,\\ \dfrac{l}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m=2k-1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l},\quad x\in[0,l].$$

(2) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$，再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓，得以 4 为周期的周期函数 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，除了间断点 $x=2(2k+1)(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续，且在 $[0,2)$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n = 0\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{16}{(n\pi)^3}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\\ &= (-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]\quad (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2).$$

展开为余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$，再将 $\psi(x)$ 作周期延拓，得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件．且在 $[0,2]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=(-1)^n\frac{16}{(n\pi)^2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=0.\ (n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2].$$

*3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)=e^{-x}$. 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解　$f(x)$ 满足收敛定理的条件，且除了点 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续.

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-x}e^{-in\pi x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-(1+n\pi i)x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+n\pi i}\left[e^{-(1+n\pi i)x}\right]_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2}(e^{-1}\cdot e^{-n\pi i}-e\cdot e^{n\pi i})$$

$$=\frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2}\,\frac{e\cos n\pi-e^{-1}\cos n\pi}{2}$$

$$=(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{2}\,\frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{2}\,\frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2}\cdot e^{in\pi x},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{2k+1\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

*4. 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数. 已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi t}{T}}\quad(-\infty<t<+\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

解　由题设知　　$c_n=\dfrac{h}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi\tau}{T}\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots).$

因

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\overline{c_n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

可见
$$a_n=\mathrm{Re}(2c_n),\quad b_n=\mathrm{Im}(2\overline{c_n}).$$
而 c_n 为实数，故
$$a_n=\frac{2h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},\quad b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$
故
$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cdot\cos\frac{2n\pi t}{T}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

总习题十二

1. 填空：

(1) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的________条件，不是它收敛的________条件；

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的________条件；

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定________；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定________.

解　(1) 必要，充分；(2) 充要；(3) 收敛，发散.

2. 下题中给出了四个结果，从中选出一个正确的结果.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $|x|$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left[\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$

(B) $\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{2^2}\sin 2x+\dfrac{1}{4^2}\sin 4x+\dfrac{1}{6^2}\sin 6x+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\sin 2nx+\cdots\right]$

(C) $\dfrac{4}{\pi}\left[\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$

(D) $\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2^2}\cos 2x+\dfrac{1}{4^2}\cos 4x+\dfrac{1}{6^2}\cos 6x+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\cos 2nx+\cdots\right]$

解　偶函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数，故排除(B).

又因为
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi\neq 0,$$
所以排除(C)与(D)，从而选(A).

3. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2n^2}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10}n}$；　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^s}$ $(a>0,s>0)$.

解　(1) $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2n^2}=\dfrac{[(n-1)!]^2}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$，由于一般项不趋于零，故级数发散.

(3) $u_n=\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}=v_n$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 是收敛的$\left(\text{事实上},\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}<1\text{，据比值审敛法知}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}\text{收敛}\right)$，故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n=\dfrac{1}{\ln^{10}n}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}=+\infty$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

注　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}$ 时，可考虑极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^{10}n}{n}$.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10\ln^9 x}{x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10!}{x}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{10}n}{n}=0,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty.$$

(5) $u_n=\dfrac{a^n}{n^s}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^s=a$.

由比值审敛法知，当 $a<1$ 时级数收敛，当 $a>1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$，由 p - 级数的结论知，当 $s>1$ 时级数收敛，当 $s\leqslant1$ 时级数发散.

4. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

证 根据题设条件知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，故有$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$. 由极限定义知，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $u_n+v_n<1$，从而

$$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n\quad(n\geqslant N),$$

故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛？试说明理由.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数时，在题设条件下 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必定收敛. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$. 根据收敛数列的保号性知，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时有$\dfrac{v_n}{u_n}>0$，即有 $v_n>0$. 于是，按正项级数的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}v_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是正项级数时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 可能不收敛. 例如：若 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$v_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]=1$，然而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

6. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解 (1) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^p}$，$|u_n|=\dfrac{1}{n^p}$，当$p>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛；当$0<p\leqslant1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛且为条件收敛；当 $p\leqslant0$ 时，由于 $u_n\not\to0(n\to\infty)$，此时级数发散. 综上可知，当 $p>1$ 时，级数绝对收敛；当 $0<p\leqslant1$ 时，级数条件收敛；当 $p\leqslant0$ 时，级数发散.

(2) $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$，$|u_n|\leqslant\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{n+1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ 收敛，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

(3) $u_n=(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由极限形式的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛，故该级数条件收敛.

(4) $u_n=(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}<1.$$

由比值审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}\right]$.

解　(1) 由于 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的部分和，而由正项级数的根值审敛法，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{e}{3}<1,$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，于是部分和 s_n 有界，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=0.$$

(2) $2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{2}{9}}\cdot2^{\frac{3}{27}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$,

为此，先求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)$. 记

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}s_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}.$$

将以上两式相减，得

$$\frac{2}{3}s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^n}.$$

即

$$s_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}.$$

注 通过求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$，然后求出 $s(1)$ 也可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{3}{4}$.

8. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

解 (1) $u_n=a_nx^n,a_n=\frac{3^n+5^n}{n}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5,$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{5}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

(2) $u_n=a_nx^n,a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+1}}{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2}}=\frac{e^2}{e}=e$$

$$\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right),$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{e}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

(3) 令 $x+1=t$，即 $x=t-1$，先讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛区间.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故收敛半径 $R=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，从而原级数的收敛区间为 $(-2,0)$.

(4) 令 $\frac{x^2}{2}=t$，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$，由第(3)题知该级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

因 $x=\pm\sqrt{2t}$,故原级数的收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

9. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$;　　*(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$;　　*(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解　(1) $u_n(x)=\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{|x|^2}{2}=\frac{|x|^2}{2}.$$

当$\frac{|x|^2}{2}<1$时,原级数收敛;当$\frac{|x|^2}{2}\geqslant 1$时,因级数的一般项$u_n(x)\not\to 0(u\to\infty)$,故级数发散. 因此原级数的收敛域为$\frac{|x|^2}{2}<1$,即$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设和函数为$s(x)$,即$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,从0到$x$积分并逐项积分:

$$\int_0^x s(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

上式两端对x求导,得

$$s(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

*(2) $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2=|x|^2.$$

当$|x|<1$时,级数收敛;当$|x|>1$时,因级数一般项$u_n(x)\not\to 0(n\to\infty)$,故级数发散;当$x=\pm 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$是收敛的交错级数,因此原级数的收敛域为$[-1,1]$. 设和函数为$s(x)$,则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad 且\quad s(0)=0.$$

在$(-1,1)$内,上式两端对x求导,得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^{n}=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x.$$

又由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛，且 $\arctan x$ 在 $x=\pm1$ 处连续，故

$$s(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

(3) 令 $x-1=t$，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$. 记其和函数为 $\varphi(t)$，即有

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'$$
$$=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^2},\quad t\in(-1,1).$$

于是原级数的和函数

$$s(x)=\varphi(x-1)=\frac{x-1}{(2-x)^2},\quad x\in(0,2).$$

*(4) $u_n(x)=a_nx^n$，$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$，得幂级数的收敛半径 $R=1$. 当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛，故幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

当 $x=0$ 时，$s(0)=0$；

当 $0<|x|<1$ 时，

$$xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

上式两端对 x 求导，得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

再求导，得

$$[xs(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

注意到 $[xs(x)]'_{x=0}=0$，上式两端从 0 到 x 积分，得

$$[xs(x)]'=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x),$$

再积分,得

$$xs(x)=-\int_0^x \ln(1-x)\mathrm{d}x=(1-x)\ln(1-x)+x,$$

于是

$$s(x)=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1,\quad x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛,故和函数分别在 $x=\pm1$ 处左连续与右连续,于是 $s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1=1.$

因此

$$s(x)=\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

10. 求下列数项级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解　(1) 利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty)$,取 $x=1$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\mathrm{e}.$$

注　本题也可通过先求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$,再求出 $s(1)$,得到所求的数项级数的和.

(2) 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$,故取 $x=1$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sin 1,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1).$$

注　本题也可通过先求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数 $s(x)$，再求出 $s(1)$，得到所求的数项级数的和.

11. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(2) $\frac{1}{(2-x)^2}$.

解　(1) 因

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

而

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in[-1,1],$$

故

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \int_0^x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].$$

(2) 因

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)',\quad x\neq 2.$$

而

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n,\quad x\in(-2,2).$$

故

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)' = \left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1},\quad x\in(-2,2).$$

12. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ \mathrm{e}^x, & x\in[0,\pi).\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数．

解 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，且除了 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi};$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\cos nx\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}-n^2a_n,\end{aligned}$$

故

$$a_n=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\quad(n=1,2,\cdots);$$

而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x\right)=-na_n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\pi}+1}{n^2+1}n\sin nx\right],$$

$$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

13. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数．

解 (1) 展开成正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓，得 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\0, & x=0,\\-f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$ 再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓，得 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，且在 $(0,\pi]$ 上 $\Phi(x)=f(x)$，并有间断点 $x=0,x=h$．

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos nh)}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi].$$

（2）展开成余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓，得 $\psi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,\pi],\\ f(-x), & x\in(-\pi,0],\end{cases}$ 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件，在 $[0,\pi]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$，且有间断点 $x=h$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^h \mathrm{d}x=\frac{2h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin nh}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,\quad x\in[0,h)\cup(h,\pi].$$